TESIS DOCTORAL

Muestreo analítico, series interpolatorias tipo-Lagrange y espacios de De Branges

Paulo Enrique Fernández Moncada

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Tesis Doctoral

Muestreo analítico, series interpolatorias tipo-Lagrange y espacios de De Branges

Autor

Paulo Enrique Fernández Moncada

Directores

Antonio García García (UC3M)

Miguel Angel Hernández-Medina (UPM)

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Leganés, Octubre 2012

Dedicatoria

Índice general

1

A modo de introducción

A finales de la década de los cincuenta del siglo pasado, el físico–matemático alemán Henry Paul Kramer (1924-2005) – empleado en aquel momento en los famosos *Bell Telephone Laboratories* en New Jersey – se preguntaba en su artículo de 1957 *A generalized sampling theorem* [81], lo siguiente:

> “ *If*
> $$f(t) = \int_I K(t,x)g(x)dx \tag{1.1}$$
> *under what condition on the kernel* $K(t,x)$ *it is possible to write*
> $$f(t) = \sum f(t_n)S_n(t) \tag{1.2}$$
> *where* $\{t_n\}$ *is a set of points and* $\{S_n(t)\}$ *a corresponding system of functions?* ”

haciendo alusión al conocido teorema de muestreo de Whittaker-Shannon-Kotel’nikov (el cual en adelante denominaremos en forma abreviada teorema WSK), resultado fundamental a partir del cual se desarrolló además de la moderna teoría de muestreo, las teorías de la información y de control y procesamiento de datos, desde la publicación de su versión más difundida en 1949, debida a Claude Shannon [102].

El teorema WSK[1] provee una fórmula de muestreo en el espacio de las funciones banda-limitada. Se dice que una señal f es banda-limitada si no tiene frecuencias superiores a $\sigma/2$ ciclos por segundo, esto quiere decir, usando terminología matemática que f es una función continua en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, con energía finita; es decir, $E_f := \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt < \infty$, y además, su transformada de Fourier $\widehat{f}$ tiene soporte en $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$. Concretamente, el teorema WSK afirma que toda función banda-limitada al intervalo $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$, para $\sigma > 0$, que se representa como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma} \widehat{f}(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} d\omega \tag{1.3}$$

puede ser recuperada a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(n/\sigma)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en los puntos equiespaciados $\{n/\sigma\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de la recta real, mediante la serie cardinal

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\Big(\frac{n}{\sigma}\Big) \frac{\sin \pi(\sigma t - n)}{\pi(\sigma t - n)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

La convergencia de la serie (1.4) es absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{R}$.

El objetivo de la pregunta planteada por Kramer en su trabajo [81], consistía en el estudio de condiciones generales bajo las cuales si se sustituye el núcleo de Fourier $[K(\omega)](t) := \mathrm{e}^{i\omega t}/\sqrt{2\pi}$ por núcleos arbitrarios $K(x,t)$, para funciones que tengan una representación integral similar a (1.3) sobre un intervalo real I, fuera posible encontrar un desarrollo en serie como (1.4) para recuperar tales funciones a partir de un conjunto dado de sus muestras.

La respuesta formal al problema la dio Kramer en ese mismo documento, mediante un lema (según Higgins [71, p. 78], elevado a la categoría de teorema por otros matemáticos), que posteriormente se convertiría en un resultado importante de la teoría de muestreo: el *teorema de muestreo de Kramer*. La solución, desde un punto de vista abstracto, consiste en reconstruir funciones en el conjunto de imágenes de una transformada integral como (1.1) a partir de una sucesión de sus muestras.

Utilizando notación moderna, el lema de Kramer afirma lo siguiente [81]:

Sea $K(x,t)$ una función en $L^2(I)$, con $I = [a,b]$ un intervalo real, continua en la variable t, tal que para cada t fijo, $\{K(\cdot,t)\}$ pertenece a $L^2(I)$. Supongamos que existe una sucesión de números reales $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\{K(x,t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(I)$.

[1]El teorema WSK debe su nombre además de C. Shannon, al matemático inglés E. T. Whittaker (quien lo descubrió en 1915 en su trabajo acerca de la serie cardinal, el cual fue posteriormente mejorado por J. M. Whitttaker en 1935; véanse entre otros [117], [70] y [88]) y al ingeniero ruso V. A. Kotel'nikov quien publicó el teorema en 1933. Sin embargo, en [35] se menciona a K. Ogura como la primera persona que ofreció una prueba rigurosa del teorema, en 1920; y en [30], a I. Someya quien lo publicó paralelamente a Shannon en 1949. Además de las referencias dadas anteriormente, en [31], [36], [70] y [71] se encuentra abundante información acerca de los orígenes del teorema WSK.

Entonces, toda función representable en la forma integral

$$f(t) = \int_a^b F(x)K(x,t)dx = \left\langle F, \overline{K(\cdot,t)} \right\rangle_{L^2(I)}, \tag{1.5}$$

con $F \in L^2(I)$*, puede ser reconstruida a partir de sus muestras en los puntos* $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *mediante la serie*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t_n)S_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

donde las funciones muestrales $S_n(t)$ *están dadas por*

$$S_n(t) = \frac{\int_I K(x,t)\overline{K(x,t_n)}dx}{\int_I |K(x,t_n)|^2 dx}. \tag{1.7}$$

La serie en (1.6) *converge uniformemente en subconjuntos de la recta real donde la función* $t \longmapsto \|K(\cdot,t)\|_{L^2(I)}$ *está acotada.*

Nótese que el teorema de Kramer no especifica la forma de encontrar el núcleo $K(x,t)$ y la sucesión de puntos de muestreo $\{t_n\}$. Por otra parte, obsérvese que las funciones $\{S_n(t)\}$ denominadas por Kramer "sistema de funciones" y que actualmente suelen llamarse funciones muestrales se obtienen en términos del núcleo $K(x,t)$. Por ejemplo, en (1.4) esta sucesión de funciones corresponde a las funciones $S_n(t) := \operatorname{senc}(\sigma t - n)$ donde

$$\operatorname{senc} t = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

A la función $\operatorname{senc} t$ se le conoce como *seno cardinal de t.*

El teorema WSK es un caso particular del teorema de Kramer. El núcleo K es el de Fourier $K(\omega,t) = e^{i\omega t}/\sqrt{2\pi}$, la sucesión de puntos de muestreo $\{t_n\}$ corresponde a los puntos equiespaciados de la recta real $\{n/\sigma\}_{n\in\mathbb{Z}}$ para $\sigma > 0$. En este caso, la sucesión $\{e^{i\omega n/\sigma}/\sqrt{2\pi\sigma}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2[-\pi\sigma, \pi\sigma]$. Al sustituir en (1.7) se obtienen las funciones muestrales $S_n(t) := \operatorname{senc}(\sigma t - n)$. Por lo tanto, toda función f dada por (1.3) se recupera a partir de sus muestras en los puntos $\{n/\sigma\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mediante la serie cardinal (1.4).

Otro ejemplo del teorema de Kramer es el siguiente: consideremos $I = [0,1]$ y el núcleo $K(x,t) = \sqrt{xt}J_\nu(xt)$ donde $J_\nu(t)$ es la función de Bessel de orden ν para $\nu > -1$, dada por

$$J_\nu(t) = \frac{t^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1+\nu)\cdots(n+\nu)} \Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n}\Big].$$

Los puntos de muestreo están dados por la sucesión de ceros positivos $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la función J_ν, para los cuales la sucesión $\big\{K(x,t_n) = \sqrt{xt_n}J_\nu(xt_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ forma una base ortogonal de $L^2(0,1)$ [69, p. 40]. Al sustituir en (1.7) se obtienen las funciones muestrales S_n; en consecuencia, toda función de la forma

$$f(t) = \int_0^1 F(x)\sqrt{xt}J_\nu(xt)dx, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{1.8}$$

donde $F \in L^2(0,1)$, se puede representar mediante la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{2\sqrt{xt_n}J_\nu(t)}{J'_\nu(t_n)(t^2-t_n^2)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Para resolver el problema descrito al comienzo, Kramer obtuvo fórmulas de muestreo para funciones definidas por transformadas integrales como (1.1), cuyos núcleos provienen del estudio de problemas autoadjuntos asociados a operadores diferenciales de orden n [81]. A continuación, a través de un ejemplo, haremos una breve descripción de los argumentos seguidos por Kramer en su artículo [81], mediante los cuales se estableció una conexión entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y la teoría de muestreo.

Consideremos el problema de Sturm-Liouville regular [120],

$$y'' = ty, \quad x \in [0,\pi] \tag{1.10}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{1.11}$$

Una solución de (1.10) la cual además verifica la condición $y'(0) = 0$ es la función $\Phi(x,t) = \cos(\sqrt{t}x)$. Los valores propios del problema son $\lambda_n = n^2$ para $n \in \mathbb{N}_0$, y las funciones propias están dadas por la sucesión $\{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Estas funciones se obtienen cuando el parámetro t se sustituye por cada uno de los autovalores del problema. Si tomamos como núcleo $K(x,t) = \Phi(x,t)$ y como sucesión de puntos de muestreo $\{t_n = n^2\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, entonces la base ortogonal de $L^2(0,\pi)$ estará conformada por dicha sucesión de funciones propias; es decir, $\{K(x,t_n) = \Phi(x,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Por lo tanto, al sustituir en (1.7), obtenemos las funciones muestrales

$$S_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{t}\pi}{\sqrt{t}\pi}, & n = 0, \\[2ex] \dfrac{2\sqrt{t}\operatorname{sen}\pi(\sqrt{t}-n)}{\pi(t-n^2)}, & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

con lo cual, si

$$f(t) = \int_0^\pi F(x)\cos(\sqrt{x}t)dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F \in L^2(0,\pi)$, entonces,

$$f(t) = f(0)\frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}\pi}{\sqrt{t}\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2)\frac{\sqrt{t}\operatorname{sen}\pi(\sqrt{t}-n)}{\pi(t-n^2)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Como se mencionó anteriormente, Kramer trabajó con operadores diferenciales de orden n. En concreto, estudió un problema regular de la forma

$$\begin{array}{ll} Ly = ty & x \in I = [a,b], \\ U_j(y) = 0 & j = 1, 2, \cdots, n, \end{array} \tag{1.13}$$

donde

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)\frac{d^k y}{dx^k},$$

y $U_j(y) = 0$, para $j \in \mathbb{N}$, es un sistema homogéneo de condiciones de frontera linealmente independientes de la forma

$$U_j(y) = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}y^{(k-1)}(a) + d_{j,k}(b)\,,\ j = 1, 2, \cdots, n,$$

donde $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ son constantes complejas. Además, para cada $k = 0, 1, 2, \cdots, p_k(x)$ es una función con valores en $\mathbb{C}$, perteneciente a la clase $\mathcal{C}^{n-k}([a,b])$ y tal que $p_0(x) \neq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Recuérdese que el operador L es regular si tanto a como b son regulares; esto es, son finitos y $p_0(a) \neq 0$, $p_0(b) \neq 0$; en otro caso, se dice que L es singular (véanse entre otros [6], [42] y [111]).

Kramer observó que si el problema autoadjunto regular (1.13) tiene una solución $\Phi(x,t)$ en $L^2(I)$, tal que si $\{\Phi(x,\lambda_n)\}$ es una base ortogonal de $L^2(I)$, siendo $\{\lambda_n\}$ la sucesión de autovalores (y $\{\Phi(x,\lambda_n)\}$ la sucesión de funciones propias) del operador L, entonces, es posible elegir a la función $\Phi(x,t)$ como el núcleo $K(x,t)$; así como a la sucesión $\{t_n = \lambda_n\}$ como el conjunto de puntos de muestreo en el referido teorema.

Si se cumplen las condiciones anteriores, se dice que el problema autoadjunto regular (1.13) tiene la *propiedad de Kramer* [88, p. 150], y en consecuencia, están dados los elementos para generar fórmulas de muestreo como (1.2).
Es importante mencionar que no necesariamente el núcleo $K(x,t)$ de la transformada (1.5) debe provenir de un problema del estilo de (1.13). Aunque Kramer no establece pautas generales para encontrar el núcleo $K(x,t)$ y la sucesión de puntos $\{t_n\}$, existen otros resultados en los cuales se hace uso de otra metodología para encontrar el núcleo (véase [71, p. 85]).

Para ilustrar su resultado, Kramer probó que el teorema WSK es un caso particular de su lema [81, p. 71], considerando la ecuación $-iy' = ty$, para $x \in [-\pi\sigma, \pi\sigma]$, con la condición $y(-\pi\sigma) = y(\pi\sigma)$. En otro ejemplo, a partir de $y'' - (\nu^2 - 1/4)y/x^2) = ty$

para $x \in [0,1]$, junto a $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, dedujo una fórmula de muestreo para la transformada (1.8). Este último ejemplo es interesante, debido a que pese a que corresponde a un problema singular (hay singularidad en 0), existe una fórmula de muestreo asociada.

Cuando el núcleo $K(x,t)$ está asociado a un problema regular con condiciones de frontera como (1.13), hay un inconveniente acerca del resultado de Kramer: No es fácil (de hecho Kramer no lo especifica en su artículo y aún es un problema abierto), encontrar condiciones generales o bien sobre el operador L o sobre las condiciones de frontera de tal forma que un problema general como (1.13) tenga la *propiedad de Kramer*. En la actualidad está claro que no todos los problemas regulares con condiciones de frontera la tienen; por ejemplo, si el orden del operador L es mayor que 2 o si las condiciones de frontera son mixtas; es decir, involucran condiciones sobre $y^{(n-1)}, \cdots, y'$, los problemas correspondientes no necesariamente son de tipo Kramer (véase Zayed, [117, p. 50 y ss.]).

En las cinco décadas transcurridas desde la publicación del teorema, se llevaron a cabo nuevas investigaciones no solo para dar respuesta a algunos de los problemas citados anteriormente, sino para encontrar extensiones y aplicaciones del teorema. Como prueba de esto, tenemos una gran cantidad de resultados obtenidos en conexión con distintas áreas de la matemática; basta citar algunos de ellos: en conexión con operadores diferenciales y en diferencias véanse [33], [48], [49], [50], [52], [59], [117], [118] [119] y [120]; con operadores integrales [4]; con funciones especiales [117]; la versión discreta del teorema [57], [58]; la versión multidimensional [117]; su extensión (y por tanto la del teorema WSK) a funciones aproximadamente banda-limitadas [34], y [88, p. 165], entre muchas otras.

Un problema interesante hacia el cual se orientó la investigación en teoría de muestreo, relacionada con el teorema de Kramer (y del teorema WSK como caso particular del anterior), tiene que ver con la posibilidad de escribir la fórmula de muestreo (1.6) como una serie interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(t) = \sum_n f(t_n) \frac{P(t)}{(t-t_n)P'(t_n)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Si el núcleo de la transformada (1.5), se obtiene arbitrariamente, no necesariamente (1.6) es expresable en la forma (1.14); sin embargo, cuando éste, la sucesión de puntos $\{t_n\}$ y las funciones muestrales $\{S_n\}$ está asociados a un problema regular autoadjunto, entonces, esta posibilidad es cierta. Por ejemplo, nótese que si en (1.12) hacemos

$$P(t) = \frac{\sqrt{t}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{t}\pi}{\pi}$$

entonces, (1.12) tiene la forma (1.14)

Cuando el operador diferencial es de orden n, en [33] se prueba que dado el problema autoadjunto (1.13), si todos los valores propios del operador son simples, entonces existe el núcleo $\Phi(x,t)$ tal que toda función f representable mediante la integral

$$f(t) = \int_a^b F(x)\Phi(x,t)dx\,,$$

donde $F \in L^2[a,b]$, es una función entera, la cual se puede expresar mediante la serie interpolatoria

$$f(t) = \sum_n f(\lambda_n)\frac{P(t)}{(t-\lambda_n)P'(\lambda_n)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

donde $\{\lambda_n\}$ son los valores propios del operador y

$$P(t) = \begin{cases} \prod_n \left(1 - \dfrac{t}{\lambda_n}\right), & \text{si cero no es un valor propio,} \\ \lambda \prod_n \left(1 - \dfrac{t}{\lambda_n}\right), & \text{si cero es un valor propio.} \end{cases}$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en compactos del plano complejo.

En el caso de operadores de segundo orden, el resultado mas importante en esta dirección se obtuvo en [119], donde se probó que para problemas de Sturm-Liouville regulares, la serie (1.6) es equivalente a otra de la forma (1.14). Incluso, si el problema autoadjunto es singular. Esto último es posible debido a que algunos problemas autoadjuntos singulares tienen la *propiedad de Kramer*, con lo cual, los desarrollos obtenidos a partir del teorema de Kramer pueden ser escritos como series interpolatorias tipo-Lagrange [117, p. 108].

Para finalizar esta breve descripción acerca del origen del teorema de Kramer y su relación con las EDO'S, grosso modo destacamos dos hechos:

- Como se mencionó en la página 4 respecto al segundo ejemplo dado por Kramer [81, p. 71] para ilustrar su resultado, quedaba abierta la posibilidad de extender su teorema al considerar problemas singulares. Campbell [36], trabajó sobre este tipo de problemas con operadores de orden 2; en particular los relacionados con las ecuaciones de Bessel y Legendre. En [117] se mencionan otras investigaciones en esa dirección, como por ejemplo, algunos resultados obtenidos por Jerri [76] quien obtuvo series muestrales similares a las que obtuvo Kramer que involucran a las ecuaciones de Laguerre y Hermite entre otras. No obstante, los resultados mas notorios se obtuvieron en [120]; ahí se mejoraron las técnicas usadas en [119] y se extendieron a problemas de Sturm-Liouville singulares , en donde los problemas autoadjuntos considerados tienen la *propiedad de Kramer* y las series muestrales obtenidas son análogamente interpolatorias tipo-Lagrange. En particular se consideraron problemas singulares derivados en los casos punto-límite y círculo-límite. En [117], se estudian con mayor detalle estas dos clases de problemas de Sturm-Liouville así como problemas con operadores de orden n.

- El teorema de Kramer no necesariamente es válido para todo problema autoadjunto; por ejemplo si el operador tiene autovalores simples salvo un número finito de ellos, no siempre es posible obtener un desarrollo en serie como (1.6). En [88], Zayed y Butzer presentan una interesante generalización del teorema en la cual se debilita la hipótesis original respecto al conjunto $\{K(x,t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, el cual aunque sigue siendo ortogonal, no necesariamente es completo en $L^2(I)$. Esto trae como consecuencia que para el problema autoadjunto se debilita la condición de tener la *propiedad de Kramer* y por lo tanto se pueden obtener fórmulas de muestreo asociadas, convergentes en un subespacio de $L^2(I)$, aplicando la versión modificada. Por ejemplo, se puede aplicar al caso mencionado anteriormente, cuando los autovalores del operador son simples, salvo un número finito de ellos.

Hemos hecho una breve descripción acerca de los orígenes del teorema de Kramer, el cual, es importante para nuestros propósitos, debido a que en este trabajo se hará una prueba de una versión abstracta del mismo. También se ha mencionado al teorema WSK como un caso particular del mismo. Los dos resultados han sido determinantes en la fundación y crecimiento de la moderna teoría de muestreo. En este punto, es conveniente describir usando un lenguaje actual, en que consiste el problema básico del cual se ocupa la teoría de muestreo:

Dado un espacio vectorial de funciones, se busca recuperar puntualmente toda función del espacio a partir de sus muestras en un conjunto discreto de puntos. En concreto, se busca elegir un conjunto de puntos $\{t_n\}$ (en el cual toda función f del espacio se pueda interpolar en forma única) y además, derivar una serie interpolatoria como (1.2). La convergencia de esta serie debe ser absoluta y uniforme en conjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Al respecto, es conveniente hacer dos comentarios: en primer lugar, al usar núcleos tipo Kramer $K(x,t)$ y considerar bases ortonormales $\{K(x,t_n)\}$, los desarrollos muestrales obtenidos son ortogonales; además las funciones muestrales satisfacen una condición interpolatoria en los puntos $\{t_n\}$. El segundo aspecto, tiene que ver con el espacio de funciones en el cual se derivan las fórmulas de muestreo: un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Zayed, [121], menciona a Beutler [18] y K. Yao [115], como precursores de la idea de hacer muestreo en espacios de Hilbert en artículos publicados en la década del sesenta del siglo pasado. Dos de los trabajos mas reconocidos y citados, con resultados en ese sentido son los siguientes: en [68], Higgins usa la dualidad entre una base y su base biortogonal asociada en un espacio de Hilbert con núcleo reproductor para derivar una fórmula de muestreo mas general que la proporcionada por el teorema de Paley-Wiener para funciones banda-limitada. El otro, se encuentra en los artículos de Benedetto (véanse [11] y [12]) y Benedetto y Heller [13], quienes usaron *frames* en un espacio de Hilbert, para derivar fórmulas de muestreo para funciones banda-limitada.

El concepto formal de núcleo reproductor en un espacio de Hilbert de funciones fue introducido por N. Aronszajn [5], en 1950. Sin embargo, probablemente los orígenes de la noción de núcleo reproductor se remontan a G. Hardy [67], en su estudio relacionado con la serie cardinal y el teorema de Paley-Wiener (véase [93, p. 12]). Por una parte, Hardy demostró que la clase de funciones representables en la forma

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma} \widehat{f}(\omega) \mathrm{e}^{i\omega z} d\omega\,, \quad z \in \mathbb{C},$$

llamadas por él funciones de Paley-Wiener conforman un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ usualmente denotado $PW_{\pi\sigma}$ (en adelante, mencionaremos reiteradamente a éste, como el espacio de Paley-Wiener $PW_{\pi\sigma}$). Puesto que a través de una serie como (1.4) se recuperan todas las funciones en $PW_{\pi\sigma}$ Hardy notó que las funciones muestrales dadas por $\{S_n(t) := \operatorname{sinc}\,(\sigma t - n) = \sin\pi(\sigma t - n)/\pi(\sigma t - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ conforman una base ortonormal para $PW_{\pi\sigma}$. Además, probó que este espacio es lo que en la actualidad denominamos un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Esto básicamente significa que toda función $f \in PW_{\pi\sigma}$ se puede reproducir a través del producto interno entre f y el núcleo (reproductor) $\sin\pi(\sigma t - u)/\pi(\sigma t - u)$; es decir,

$$\left\langle f(u), \frac{\sin\pi(t-u)}{\pi(t-u)} \right\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\sin\pi(t-u)}{\pi(t-u)} du = f(t)$$

El problema de hacer muestreo en un espacio de Hilbert con núcleo reproductor en abstracto, se resume a continuación. Pero antes de ello, se necesita el concepto de *frame* (véase la sección 2.4, p. 27): sea $\mathcal{H}$ un un espacio de Hilbert separable, una sucesión $\{x_n\}$ es un *frame* en $\mathcal{H}$ si existen dos constantes positivas A y B tales que

$$A\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, x_n\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \le B\|x\|_{\mathcal{H}}^2\,, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Las constantes óptimas (para A la más grande de las cotas inferiores y para B la más pequeña de las cotas superiores) se denominan cotas del *frame*.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de funciones definidas sobre un dominio Ω, con estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor (la teoría básica acerca de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor se describe en la sección 2.3, p. 18). Entonces:

1. Un conjunto de muestreo estable para $\mathcal{H}$ es un subconjunto numerable $\Lambda \subset \Omega$ tal que existen dos constantes positivas A y B, tales que

$$A\|f\|^2 \le \sum_{\lambda\in\Lambda} \left|f(\lambda)\right|^2 \le B\|f\|^2,$$

para toda f en $\mathcal{H}$.

2. Por el teorema de representación de Riesz, para todo $x \in \mathcal{H}$ existe $h_x \in \mathcal{H}$, tal que
$$f(x) = \big\langle f, h_x \big\rangle_{\mathcal{H}},$$
donde la función $\kappa(s,t) = \langle h_s, h_t \rangle$ es el núcleo reproductor de $\mathcal{H}$.

Entonces, recuperar (de manera estable) una función f en $\mathcal{H}$ a partir de sus muestras $\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es equivalente a que la sucesión $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sea un *frame* en $\mathcal{H}$; esto es, $A\big\|f\big\|^2_{\mathcal{H}} \le \sum_{n=1}^{\infty}\big|\langle f, h_\lambda\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2 \le B\big\|f\big\|^2_{\mathcal{H}}$. Pero esto último es equivalente a la existencia de un conjunto de muestreo estable en $\mathcal{H}$. En consecuencia, f se puede reconstruir mediante la fórmula
$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda) g_\lambda, \quad f \in \mathcal{H}.$$
donde $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un frame dual (véase la página 28) de $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. La convergencia de esta serie es en la norma de $\mathcal{H}$ y por ser este un espacio con núcleo reproductor, la convergencia es puntual en Ω.

Por otra parte, sean I un intervalo real, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y consideremos un núcleo $K(x,t)$, para $(x,t) \in I \times \mathbb{R}$. Definimos en $L^2(I)$ una transformada integral como (1.1)
$$f(t) := \int_I K(x,t)F(x)dx = \big\langle K(\cdot,t), \overline{F}\big\rangle_{L^2(I)}, \quad t \in \Omega$$
donde $F \in L^2(I)$, entonces, el rango de dicha transformada
$$\mathcal{H}_K := \left\{ f \;: \Omega \to \mathbb{C} \mid f(t) = \int_I K(x,t)F(x)dx, \quad F \in L^2(I) \right\},$$
es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor [100]. Este espacio $\mathcal{H}_K$ es un escenario óptimo para hacer muestreo, si de acuerdo a lo mencionado anteriormente, existe un conjunto de mustreo estable en Ω.

Esta idea se puede generalizar de la siguiente forma: sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, y una función K definida sobre un dominio Ω real o complejo, con valores en $\mathcal{H}$, de tal forma que el conjunto
$$\Big\{ K(t) : \; t \in \Omega \Big\}$$
es completo en $\mathcal{H}$. Entonces,
$$\mathcal{H}_K := \Big\{ F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \;\mid\; f_x(t) := \Big\langle K(t), x \Big\rangle_{\mathcal{H}}, \quad x \in \mathcal{H} \Big\},$$
será un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Si en este espacio existe un conjunto de muestreo estable Λ, entonces existe un *frame* $\{S_\lambda : \; \lambda \in \Lambda\}$ en $\mathcal{H}$ [66], tal que para toda f en $\mathcal{H}$, es posible obtener una fórmula de muestreo como
$$f(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda) S_\lambda(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Esta serie converge en la norma de $\mathcal{H}$ y por lo tanto puntualmente en Ω.

Para finalizar esta introducción, es necesario mencionar brevemente que la gran cantidad de trabajos que se obtuvieron en los últimos sesenta años han permitido que la teoría de muestreo se desarrolle en diferentes direcciones y presente afinidades con diversas áreas de la matemática. Por ejemplo, en relación con el muestreo irregular y el análisis no armónico; con la teoría de transformadas; con la teoría de funciones enteras cuyo origen se remonta al teorema de Paley-Wiener, con la teoría de distribuciones considerando transformadas en sentido distribucional, con la teoría de la aproximación, entre muchos otros. Y fuera de la matemática, en ingeniería, análisis de señales, teoría de la comunicación, astronomía, biomedicina e informática, entre otras áreas.

Introducción a la Memoria

La generalización de las ideas expuestas anteriormente es el aporte que se desarrolla en esta memoria. En concreto la situación es la siguiente: tomamos como punto de partida un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ y una función compleja K, con valores en $\mathcal{H}$. Consideramos un operador abstracto $\mathcal{T}_K$ con dominio en $\mathcal{H}$ y valores en el conjunto de funciones con dominio y rango complejos, para el cual K será el núcleo. Con esos elementos construimos un espacio de funciones de la forma

$$\Big\{ f_x(z) := \Big\langle K(z), x \Big\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathcal{H} \Big\},$$

donde $\mathcal{T}_K(x) = f$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Dicho espacio de funciones proveniente del núcleo K será denotado por $\mathcal{H}_K$.

El espacio de funciones $\mathcal{H}_K$ será un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Su núcleo reproductor dependerá del núcleo K del operador. Además, se estudiará la analiticidad de los elementos de $\mathcal{H}_K$; en ese sentido, probaremos que éste es un espacio de funciones enteras. La construcción de $\mathcal{H}_K$ y todos los detalles descritos serán desarrollados en el capítulo 2. Al final del mismo, se presentan algunos ejemplos de espacios $\mathcal{H}_K$.

En el capítulo 3 se desarrolla teoría de muestreo analítico en $\mathcal{H}_K$. En primer lugar, se caracteriza el núcleo K como un núcleo analítico de Kramer. Posteriormente, para garantizar la existencia de un conjunto de muestreo estable y poder desarrollar fórmulas de muestreo, elegiremos un caso particular de *frames*: las bases de Riesz. En concreto, consideraremos una base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y su base dual asociada $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio auxiliar $\mathcal{H}$. Los coeficientes del desarrollo del núcleo respecto a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ serán la sucesión de funciones muestrales $S_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, la cual será una base de Riesz para el espacio $\mathcal{H}_K$.

Para recuperar funciones a partir de sus muestras en un conjunto discreto de puntos, se probará un teorema donde se obtendrá una fórmula de muestreo no ortogonal en el espacio $\mathcal{H}_K$ (K es núcleo analítico de Kramer), de la forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{a_n} S_n(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.16}$$

Además, por ser $\mathcal{H}_K$ un espacio de Hilbert con núcleo reproductor la convergencia de (1.16) será puntual, absoluta y además uniforme en conjuntos compactos de $\mathbb{C}$ donde $\|K(z)\|$ esté acotada.

Dicho teorema recibirá el nombre de *teorema de muestreo analítico de Kramer*. También se estudia el problema recíproco; concretamente, se prueban las condiciones mediante las cuales a partir de la fórmula (1.16), la cual converge puntualmente en $\mathcal{H}_K$ y de otras condiciones adicionales, se cumple que K es un núcleo analítico de Kramer.
Además, se presentan algunos teoremas de muestreo relacionados con un problema de momentos indeterminado de Hamburger. En este caso se consideran núcleos analíticos discretos utilizando los polinomios ortogonales de primera y segunda especie relacionados con dicho problema de momentos y se utiliza uan versión discreta del teorema de Kramer. Finalmente, se deducen algunas fórmulas de muestreo utilizando muestras no solo de la función f a recuperar sino de algunas funciones relacionadas; particularmente de f'.

En el capítulo 4 se estudian fórmulas interpolatorias tipo-Lagrange como (1.14). Se introduce una propiedad que cumplen algunas clases de funciones enteras la cual denominamos propiedad *Zero-removing*, (abreviado, propiedad *ZR*). Se prueba un resultado que permite decidir cuando en el espacio $\mathcal{H}_K$ proveniente de un núcleo K polinomial, se verifica la propiedad *ZR*. Finalmente se prueba en el teorema 4.2 el resultado central del capítulo: una condición necesaria y suficiente para que toda fórmula de muestreo no ortogonal como (1.16), en $\mathcal{H}_K$ pueda ser escirta como una serie tipo-Lagrange es que en este espacio se cumpla la propiedad *ZR*.

En el capítulo 5 se desarrollan algunos elementos de muestreo en espacios de De Branges. Un espacio de De Branges, $\mathcal{H}(E)$, es un espacio de Hilbert de funciones enteras el cual se construye a partir de una función entera E denominada función de estructura del espacio, la cual pertenece a la clase de Hermite-Biehler. Los espacios $\mathcal{H}(E)$ tienen núcleo reproductor y verifican la propiedad *ZR*. Los espacios de Paley-Wiener $PW_{\pi\sigma}$ son un ejemplo clásico de espacio de De Branges.
Bajo ciertas condiciones, es posible encontrar bases ortogonales en el espacio $\mathcal{H}(E)$. En consecuencia, se prueba una fórmula de muestreo ortogonal y además, en el teorema 5.2 se prueba que todo desarrollo de este tipo se puede escribir como una serie interpolatoria tipo Lagrange.
Finalmente, se estudia cuando un espacio $\mathcal{H}_K$ es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges. En concreto, se dan dos caracterizaciones: en primer lugar, se utiliza una condición de aproximación; específicamente, se prueba que una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Hilbert de funciones $\mathcal{H}$ sea un espacio de De Branges es que $\mathcal{H}$ esté inmerso isométricamente en un espacio $L^2(\mu)$ donde μ

es una medida positiva sobre $\mathbb{R}$. En la segunda caracterización, usando muestreo, se prueba que si una fórmula ortogonal como (1.16) puede ser escrita como la serie tipo-Lagrange (1.14) donde la sucesión de puntos de muestreo es real y la función P es real cuando z es real, entonces el espacio $\mathcal{H}_K$ es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges.
También se estudia el problema recíproco, esto es, cuando un espacio de De Branges es un espacio $\mathcal{H}_K$.

En el último capítulo se derivan algunas fórmulas de muestreo en un espacio que denominaremos $\mathcal{H}_\sigma$. Se construye un núcleo K a partir de una función entera σ y del operador resolvente asociado a un operador simétrico (formalmente autoadjunto) $\mathcal{A}$, el cual es invertible (con inverso compacto) y está densamente definido sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. La función K recibirá el nombre de núcleo de muestreo σ-resolvente K_σ. Con base en esta función, se construyen por dualidad los espacios $\mathcal{H}_\sigma$, los cuales además poseen estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor. En este espacio se derivan algunas fórmulas de muestreo no ortogonales; se estudia la existencia de la propiedad *ZR* y se caracteriza como espacio de De Branges.

Todos los capítulos estarán acompañados de numerosos ejemplos que ilustran los resultados obtenidos.

2

El espacio de muestreo $\mathcal{H}_K$

En este capítulo se construirá un espacio de Hilbert de funciones enteras, escenario óptimo en el cual será posible desarrollar nuestra teoría de muestreo analítico. Para tal efecto, partimos de un espacio de Hilbert arbitrario $(\mathcal{H}, \langle \cdot, - \rangle_{\mathcal{H}})$, complejo, separable y de una función K con dominio en $\mathbb{C}$ y valores en $\mathcal{H}$. Además, definiremos un operador $\mathcal{T}_K$ entre el espacio $\mathcal{H}$ y el conjunto de todas las funciones con dominio y valores en $\mathbb{C}$, de tal manera que para cada $x \in \mathcal{H}$, $\mathcal{T}_K(x)$ será una función compleja definida mediante el producto interno $\langle K(z), x \rangle_{\mathcal{H}}$, para $z \in \mathbb{C}$. El conjunto de todas las funciones así obtenidas, es decir, la imagen de $\mathcal{T}_K$ (que resultará ser un operador antilineal) será el espacio de Hilbert de funciones enteras requerido, el cual denotaremos $\mathcal{H}_K$. A la aplicación K la denominaremos núcleo del operador $\mathcal{T}_K$.

El espacio $\mathcal{H}_K$ heredará la estructura hilbertiana de $\mathcal{H}$ y más aún, será un espacio de Hilbert con núcleo reproductor, lo cual garantiza que todo desarrollo convergente en $\mathcal{H}_K$ convergerá puntualmente, siendo esta convergencia uniforme en subconjuntos de $\mathbb{C}$ donde la función $z \longmapsto \|K(z)\|$ esté acotada. Si el núcleo K es analítico, lo serán los elementos de $\mathcal{H}_K$. Daremos una nueva caracterización de la analiticidad de las funciones en $\mathcal{H}_K$ en términos de la sucesión $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ de coeficientes del desarrollo del núcleo K respecto a una base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ y de la acotación en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ de la función $z \longmapsto \|K(z)\|$.

El objetivo principal consiste en presentar una versión abstracta del teorema de muestreo de Kramer, exhibiendo un desarrollo muestral que resultará ser no ortogonal debido a que las series obtenidas serán expansiones que se obtienen mediante la aplicación del operador $\mathcal{T}_K$ a una base de Riesz.

2.1. El espacio $\mathcal{H}_K$

Sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos llamaremos

$$\mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) := \{f\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\}.$$

al espacio vectorial de todas las aplicaciones de $\mathbb{C}$ en sí mismo. Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,-\rangle_{\mathcal{H}})$ un espacio de Hilbert complejo separable, el cual en adelante notaremos en forma abreviada $\mathcal{H}$; además, consideremos una aplicación con valores en $\mathcal{H}$, $K\ :\ \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ y un operador $\mathcal{T}_K$ definido entre $\mathcal{H}$ y el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_K: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ & x & \longmapsto & \mathcal{T}_K(x) = f_x \end{array}$$

donde para cada $x \in \mathcal{H}$, definimos la función f_x como

$$f_x(z) = \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}}\,,\ \ z \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Puesto que $\mathcal{T}_K(x)$, $x \in \mathcal{H}$, está definido en términos del producto interno (2.1), se cumple la linealidad conjugada en la segunda variable. En efecto,

$$\mathcal{T}_K(ax+by) = \langle K(z), ax+by\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{a}\,\langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}} + \overline{b}\,\langle K(z), y\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{a}\,\mathcal{T}_K(x) + \overline{b}\,\mathcal{T}_K(y),$$

para cada par $x, y \in \mathcal{H}$ y $a, b \in \mathbb{C}$.

La imagen bajo $\mathcal{T}_K$ del espacio $\mathcal{H}$ la notaremos $\mathcal{H}_K$; es decir,

$$\mathcal{H}_K := \mathcal{T}_K(\mathcal{H}) = \Big\{f\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}:\ f_x(z) = \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}}\,,\ x \in \mathcal{H}\Big\}. \tag{2.2}$$

En adelante, a la aplicación K la llamaremos el núcleo del operador antilineal $\mathcal{T}_K$ y además, por efectos prácticos omitiremos el subíndice x en f_x.

Algunas propiedades del núcleo K son heredadas en forma inmediata por los elementos pertenecientes al correspondiente espacio $\mathcal{H}_K$; por ejemplo, conforme a la definición (2.1), se observa fácilmente que la continuidad del núcleo K implica la continuidad de toda función $f \in \mathcal{H}_K$.

El espacio $\mathcal{H}_K$ como subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, es un espacio vectorial de funciones con buenas propiedades. En primer lugar, es posible dotarlo de un producto interno $\langle\cdot,-\rangle_{\mathcal{H}_K}$ a partir de la estructura hilbertiana del espacio del espacio original $\mathcal{H}$. No obstante, $\mathcal{H}_K$ posee una mejor estructura matemática respecto a la de $\mathcal{H}$, debido a que además se puede caracterizar como un espacio de Hilbert de funciones con núcleo reproductor (en adelante usaremos la abreviatura RKHS para referirnos a este tipo de espacios), lo cual se verifica en forma estándar demostrando que los funcionales de evaluación puntuales $E_z : \mathcal{H}_K \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, definidos mediante la expresión $E_z(f) = f(z)$, para f en $\mathcal{H}_K$ son acotados, o de forma equivalente, encontrando una función $\kappa : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, la cual cumple un par de propiedades y será de acuerdo a la teoría clásica de núcleos reproductores (véase Aronszajn, [5]) el núcleo reproductor de $\mathcal{H}_K$. En las secciones 2.2 y 2.3 nos ocupamos de los detalles de la construcción de $\mathcal{H}_K$ como un espacio de Hilbert con núcleo reproductor.

2.2. Estructura hilbertiana de $\mathcal{H}_K$

Para dotar a $\mathcal{H}_K$ de una estructura de espacio de Hilbert seguiremos las ideas expuestas en [99] y [100] fundamentalmente. El procedimiento consiste en establecer un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)^{\perp}$ y $\mathcal{H}_K$ donde como es usual, $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)$ designa el espacio nulo de $\mathcal{T}_K$, es decir,

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}_K) = \Big\{x \in \mathcal{H} : \ \mathcal{T}_K(x) = 0\Big\}.$$

En efecto, en primer lugar observemos que al definir la norma para todo elemento f en $\mathcal{H}_K$ a partir de la norma del espacio cociente $\mathcal{H}/\mathcal{N}$:

$$\|f\|_{\mathcal{H}_K} := \text{ínf}\Big\{\|x\|_{\mathcal{H}} : \ f = \mathcal{T}_K(x)\Big\} = \underset{h\in\mathcal{N}}{\text{ínf}}\Big\{\|x+h\|_{\mathcal{H}}\Big\}, \tag{2.3}$$

y debido a que $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)$ es subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces, como es bien conocido, el operador $\mathcal{T}_K$ será un isomorfismo entre los espacios $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)^{\perp}$ y $\mathcal{H}_K$.

Veamos ahora que es posible definir una isometría entre $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)^{\perp}$ y $\mathcal{H}_K$. Para tal fin, probaremos que existe un elemento $\widetilde{x}$ en $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{T}_K(\widetilde{x}) = f$, el cual cumple además que

$$\|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}} = \|\overline{x}\|_{\mathcal{H}/\mathcal{N}} = \|f\|_{\mathcal{H}_K},$$

donde $\overline{x}$ denota el *coset* de x, esto es, $\overline{x} = \{x+h : \ h \in \mathcal{N}\}$. Utilizando el teorema de la proyección, consideremos las proyecciones ortogonales P de $\mathcal{H}$ sobre el subespacio $\mathcal{N}$ y Q de $\mathcal{H}$ sobre su complemento ortogonal $\mathcal{N}^{\perp}$. Observamos los siguientes hechos:

a) Se cumple que $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \|Qx\|_{\mathcal{H}}$ para todo elemento $x \in \overline{x}$. En efecto, dados $x, y \in \overline{x}$ tenemos

$$x = Px + Qx \tag{2.4}$$

$$y = Py + Qy \tag{2.5}$$

Restando (2.5) de (2.4) y puesto que $x - y$ pertenece al subespacio $\mathcal{N}$, entonces $Q(x-y) = 0$ con lo cual, $Qx = Qy$. Por lo tanto, $\widetilde{x} := Qx$ para todo elemento

x en su *coset* $\overline{x}$. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}} = \|Px\|^2_{\mathbb{H}} + \|\widetilde{x}\|^2_{\mathcal{H}},$$

lo que garantiza que el ínfimo en (2.3) se alcanza y en consecuencia,

$$\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}} = \|\overline{x}\|_{\mathcal{H}/\mathcal{N}} = \inf_{x\in\overline{x}}\Big\{\|x\|_{\mathcal{H}}\Big\}.$$

b) La norma definida en (2.3) induce un producto interior en $\mathcal{H}_K$. En efecto, si $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}}$ y $\|g\|_{\mathcal{H}_K} = \|\widetilde{y}\|_{\mathcal{H}}$, entonces, utilizando la identidad de polarización obtenemos la equivalencia entre los productos interiores,

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}}} = \overline{\langle\widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle}_{\mathcal{H}}.$$

c) Por lo tanto, al tomar la restricción $\mathcal{T}_K|_{\mathcal{N}^\perp}$ del operador, se encuentra la isometría buscada; es decir, definiendo la aplicación antilineal $\mathcal{T}_K : \mathcal{N}^\perp \longrightarrow \mathcal{H}_K$ mediante $\mathcal{T}_K(\widetilde{x}) = f$ donde

$$f(z) := \langle K(z), \widetilde{x}\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.6}$$

se obtiene el anunciado isomorfismo isométrico entre tales espacios, con lo cual, $\mathcal{H}_K$ es un espacio de Hilbert.

Adicionalmente, $\mathcal{T}_K : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_K$ es inyectivo sólo si $\{K(z)\}_{z\in\mathbb{C}}$ es completo en $\mathcal{H}$. En ese caso, la aplicación $\mathcal{T}_K$ es una isometría antilineal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}_K$, es decir, $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \|x\|_{\mathcal{H}}$ siempre que $f = \mathcal{T}_K(x)$.

En particular, si existe alguna sucesión compleja $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, para la que la sucesión $\{K(z_n)\}_{n=1}^\infty$ es una base para el espacio $\mathcal{H}$, entonces, el operador antilineal $\mathcal{T}_K$ será una isometría.

2.3. $\mathcal{H}_K$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor

En esta sección, como se mencionó en la introducción al capítulo, se ampliará la estructura del espacio $\mathcal{H}_K$ probando que éste es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Básicamente nos ocuparemos de los siguientes hechos: por una parte, se encontrará el núcleo reproductor de dicho espacio. Por otro lado, dentro de esta extensa teoría, se hará una síntesis de algunas propiedades importantes que cumplen los RKHS las cuales serán utilizadas en capítulos posteriores. Se usarán en forma simultánea las dos condiciones equivalentes entre si, enunciadas anteriormente, para definir un RKHS en general.

Definición 2.1. *Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definidas sobre un dominio no vacío Ω se denomina espacio de Hilbert con núcleo reproductor si los funcionales de evaluación puntuales*

$$\begin{array}{rccc} E_z : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

para cada $z \in \Omega$ son acotados; esto es, si existe una constante positiva (dependiente de z) C_z, tal que

$$|f(z)| \leq C_z \|f\|_{\mathcal{H}} \ ,$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

Usando la definición 2.1, observamos que para toda $f \in \mathcal{H}_K$ y para cada elemento $z \in \mathbb{C}$ fijo, al aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a (2.6) obtenemos

$$|f(z)| \leq \|K(z)\|_{\mathcal{H}} \|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}} = C_z \|f\|_{\mathcal{H}_K} \ , \ \ f \in \mathcal{H}_K.$$

En consecuencia, $\mathcal{H}_K$ es un RKHS.

Ahora bien, puesto que $\mathcal{H}_K$ es un RKHS sobre $\mathbb{C}$, el teorema de representación de Riesz garantiza que todo funcional lineal acotado sobre $\mathcal{H}_K$ proviene de un producto interno. Por lo tanto, para todo $\omega \in \mathbb{C}$ fijo, existe un único elemento $\kappa_\omega \in \mathcal{H}_K$ tal que,

$$f(\omega) = \left\langle f, \kappa_\omega \right\rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad \omega \in \mathbb{C}, \tag{2.7}$$

para toda $f \in \mathcal{H}_K$. La función $\kappa : \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\kappa(z, \omega) = \kappa_\omega(z)$ recibe el nombre de núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}_K$ y verifica las siguientes propiedades:

1. Para todo $\omega \in \Omega$ fijo, $\kappa(\cdot, \omega) \in \mathcal{H}$. Esto es, κ como función de z pertenece a $\mathcal{H}$.
2. $f(\omega) = \left\langle f(\cdot), \kappa(\cdot, \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}}$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$ y para toda $f \in \mathcal{H}$.

Esta última condición, recibe el nombre de propiedad reproductora en $\mathcal{H}$.

Sin usar la condición de acotación de los funcionales de evaluación puntuales, en forma equivalente, es posible caracterizar un espacio de Hilbert con núcleo reproductor a partir de una función κ como la dada en la definición 2.1. Este proceso es mas complicado; fundamentalmente se requiere dotar de un producto interno y luego completar el espacio generado por una familia de funciones definidas en términos de κ, para obtener el RKHS $\mathcal{H}$ (véanse [5], [99], [100] entre otros).

Observese que al escribir la propiedad reproductora en la forma (2.7) dada en la definición 2.1, es decir, $f(\omega) = \langle f, \kappa_\omega \rangle_{\mathcal{H}}$, y aplicando ahora (2.7) a la función $\kappa_\omega(z)$, obtenemos

$$\kappa_\omega(z) = \left\langle \kappa_\omega, \kappa_z \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo par z, ω en $\mathbb{C}$; con lo cual tenemos que $\kappa(z, \omega) = \langle \kappa_\omega, \kappa_z \rangle_{\mathcal{H}}$. En consecuencia, son inmediatas las siguientes igualdades:

(a) $\|\kappa_\omega\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\kappa(\omega, \omega)}, \quad \omega \in \mathbb{C}.$

(b) $\kappa(\omega, z) = \overline{\kappa(z, \omega)}, \qquad z, \omega \in \mathbb{C}.$

Y la desigualdad

(c) $|\kappa(z, \omega)|^2 \leq \kappa(\omega, \omega)\kappa(z, z), \qquad z, \omega \in \mathbb{C},$

la cual es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de (a) puesto que

$$|\kappa(z, \omega)|^2 = |\langle \kappa_\omega, \kappa_z \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq \|\kappa_\omega\|^2_{\mathcal{H}} \|\kappa_z\|^2_{\mathcal{H}} = \kappa(\omega, \omega)\kappa(z, z).$$

Es importante resaltar que el núcleo reproductor es único. Para probar esto, supongamos que existe otra función κ' la cual satisface las condiciones 1 y 2. Entonces, para todo $\omega \in \mathbb{C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \kappa'_\omega(z) &= \langle \kappa'_\omega, \kappa_z \rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle \kappa_z, \kappa'_\omega \rangle}_{\mathcal{H}} = \overline{\kappa_z(\omega)} \\ &= \overline{\langle \kappa_z, \kappa_\omega \rangle}_{\mathcal{H}} = \kappa_\omega(z). \end{aligned} \tag{2.8}$$

A continuación se caracteriza el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}_K$:

Proposición 2.1. *El núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}_K$ está dado por la función*

$$\begin{array}{rccc} \kappa: & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z, \omega) & \longmapsto & \langle K(z), K(\omega) \rangle_{\mathcal{H}} \end{array}$$

Demostración. La propiedad 1 es inmediata puesto que para $\omega \in \mathbb{C}$ fijo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_K(K(\omega))(z) &= \Big\langle K(z), K(\omega) \Big\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}. \\ &= \kappa(z, \omega). \end{aligned}$$

Para verificar la propiedad reproductora, observemos lo siguiente: sabemos que $\mathcal{T}_K|_{\mathcal{N}^\perp}$ es una isometría entre los espacios $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)^\perp$ y $\mathcal{H}_K$; además, para todo elemento $z \in \mathbb{C}$, $K(z) \in \mathcal{N}(\mathcal{T}_K)^\perp$ y se cumple la igualdad de los productos interiores $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}}}$ y $\overline{\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle}_{\mathcal{H}}$ siempre que $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}}$ y $\|g\|_{\mathcal{H}_K} = \|\widetilde{y}\|_{\mathcal{H}}$. Entonces, utilizando la propiedad 1 obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle f, \kappa(\cdot, \omega) \rangle_{\mathcal{H}_K} &= \Big\langle \mathcal{T}_K(x), \mathcal{T}_K(K(\omega)) \Big\rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_K} = \overline{\Big\langle Qx, QK(\omega) \Big\rangle}_{\mathcal{H}} \\ &= \overline{\Big\langle \widetilde{x}, QK(\omega) \Big\rangle}_{\mathcal{H}} = \overline{\Big\langle \widetilde{x}, K(\omega) \Big\rangle}_{\mathcal{H}} = f(\omega), \quad \omega \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

donde Q, como se mencionó anteriormente, denota la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre el complemento ortogonal $\mathcal{N}^\perp$ de $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)$.

Por lo tanto, la aplicación,

$$\kappa(z,\omega) = \left\langle K(z), K(\omega) \right\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z,\omega \in \mathbb{C}. \tag{2.9}$$

es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}_K$.

□

Algunas propiedades de los RKHS

En el siguiente listado enumeramos algunas propiedades importantes de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor, las cuales serán utilizadas en secciones posteriores:

1. En todo RKHS, el núcleo reproductor se puede expresar en términos de una base ortonormal del espacio. Esto es, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces
$$\kappa(z,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(z)\overline{x_n(\omega)}, \quad z,\omega \in \mathbb{C}, \tag{2.10}$$
La convergencia de esta serie es absoluta.

   La propiedad 1 se sigue de la aplicación conjunta de la identidad de Plancherel-Parseval junto a la propiedad reproductora, (véase [99], p. 10).

2. Todo núcleo reproductor define una matriz positiva. Dado el núcleo reproductor $\kappa(z,\omega)$ del espacio $\mathcal{H}$, para todo conjunto finito de puntos distintos $\{z_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ y toda sucesión compleja $\{\xi_j\}_{j=1}^{n}$, se cumple que
$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{\xi_i}\xi_j \kappa(z_i,z_j) \geq 0.$$
En efecto,
$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j \kappa_{z_j} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \xi_j \kappa_{z_j}, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \kappa_{z_i} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_j \overline{\xi_i} \left\langle \kappa_{z_j}, \kappa_{z_i} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_j \overline{\xi_i} \kappa(z_i,z_j). \end{aligned}$$
El recíproco de la propiedad 2 debido a Aronszajn (véase [5]), es uno de los resultados mas importantes dentro de la teoría de los RKHS:

3. **Teorema de Aronszajn.** Para toda matriz definida positiva κ sobre $\mathbb{C}$ existe un único espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ para el cual κ es su núcleo reproductor.

La siguiente propiedad será muy importante en la parte asociada a la teoría de muestreo analítico. Hace referencia a la convergencia de una sucesión de funciones en un RKHS; la convergencia en norma es una condición suficiente para la convergencia puntual:

4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con núcleo reproductor y $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$. Entonces, $\lim_n \|f - f_n\| = 0$ implica $f(z) = \lim_n f_n(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Además, esta convergencia será uniforme en todos aquellos subconjuntos de $\mathbb{C}$ en los cuales $z \longmapsto \kappa(z, z)$ esté acotada.

La prueba es como sigue:

$$\begin{aligned}
|f(z) - f_n(z)| &= |\langle f, \kappa(\cdot, z)\rangle_{\mathcal{H}} - \langle f_n, \kappa(\cdot, z)\rangle_{\mathcal{H}}| \\
&= |\langle f - f_n, \kappa(\cdot, z)\rangle_{\mathcal{H}}| \\
&= |\langle f - f_n, \kappa_z\rangle_{\mathcal{H}}| \\
&\leq \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \|\kappa_z\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\langle \kappa(z, z)\rangle_{\mathcal{H}}}\,.
\end{aligned}$$

Es evidente de esta desigualdad, que la convergencia será además uniforme, en subconjuntos de $\mathbb{C}$ donde $\kappa(z, z)$ esté acotada.

Una manera obtener el núcleo reproductor κ es la siguiente: a partir de una sucesión de funciones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en $\mathbb{C}$ tales que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(z)|^2 < \infty$, se define una función como la dada en (2.10). Se puede probar fácilmente que esta aplicación es definida positiva y por lo tanto, de acuerdo a la la propiedad 3 (teorema de Aronszajn) se convertirá en el núcleo reproductor del RKHS resultante al completar el espacio generado por κ. La siguiente propiedad (la cual será muy útil en la prueba del teorema 3.3 del capítulo 3) permite dar condiciones acerca de la ortonormalidad de dicha sucesión de funciones, (véase [45] o [108]).

5. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\{x_n(z)\} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Entonces, dicha sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ si y sólo si $F(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n(z)$, $\alpha_n \in \ell^2(\mathbb{N})$, es la función idénticamente nula de $\mathbb{C}$ únicamente cuando $\alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para concluir esta lista de propiedades, mencionamos una forma de determinar cuándo una función compleja pertenece a un espacio de Hilbert de funciones enteras con núcleo reproductor. Esta condición aparece en [108] en donde es nombrada *RKHS test* y surgió como una interesante conclusión de un teorema probado en [107], (p. 294) llamado *Teorema B*. Esta propiedad será de bastante utilidad en el capítulo 5 relacionado con los espacios de De Branges.

6. **Criterio de pertenencia a un RKHS.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones enteras sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, con núcleo reproductor κ. Una condición necesaria y suficiente para que una función f pertenezca a $\mathcal{H}$ es que exista una constante $C > 0$, la cual depende solo de f, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(z_i)\lambda_i \right|^2 \leq C^2 \sum_{i,j=1}^{N} \kappa(z_i, z_j)\lambda_i\overline{\lambda_j}, \tag{2.11}$$

para todo par de subconjuntos finitos $\{z_1, z_2\,, \cdots\,,\, z_N\}$ en Ω y $\{\lambda_1, \lambda_2\,, \cdots\,,\, \lambda_N\}$ en $\mathbb{C}$. En estas condiciones,

$$\|f\| = \operatorname{ínf}\{C\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las constantes C que verifican (2.11).

Respecto a la propiedad anterior, es importante mencionar lo siguiente: supongamos que se desea construir el espacio $\mathcal{H}$ a partir del núcleo κ; se puede probar que para $z_1, z_2\,, \cdots\,,\, z_N$ en Ω y $\lambda_1, \lambda_2\,, \cdots\,,\, \lambda_N$ en $\mathbb{C}$, $\sum_i \kappa(\cdot, z_i)\lambda_i$ es una función analítica en la primera variable. El conjunto de dichas funciones forma un espacio prehilbertiano al ser dotado con el producto interior,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \kappa(\cdot, z_i)\lambda_i, \sum_{i=1}^{n} \kappa(-, \xi_j)\nu_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \kappa(\xi_j, z_i)\lambda_i\overline{\lambda_j}.$$

Al completar dicho espacio, se obtiene el espacio de Hilbert de funciones analíticas $\mathcal{H}$ en Ω, cuyo núcleo reproductor es κ.

En la sección 5.3, en relación con el problema de caracterizar todo espacio $\mathcal{H}_K$ como un espacio de De Branges, retomaremos el criterio dado en la propiedad 6. Bastará que la condición (2.11) se verifique para valores $z \in \mathbb{C}$ pertenecientes a un conjunto de unicidad de $\mathcal{H}$.

En el próximo apartado, se caracteriza al espacio $\mathcal{H}_K$ como un RKHS de funciones enteras.

2.4. $\mathcal{H}_K$ como espacio de Hilbert de funciones enteras

En esta sección estudiaremos la analiticidad de los elementos de $\mathcal{H}_K$; esto es, queremos encontrar algunas condiciones bajo las cuales sea posible asegurar que $\mathcal{H}_K$ es un RKHS de funciones enteras. En principio, contamos con un resultado estándar (corolario 2.1), el cual es una consecuencia directa del siguiente teorema clásico del análisis funcional (véase [109, p. 266]):

Teorema 2.1. *Sea X un espacio de Banach complejo y F una función definida en un abierto $A \subseteq \mathbb{C}$ con valores en X. Entonces, F es analítica en A si y solamente si para cada elemento x' en el espacio dual X', la función $x' \circ F : A \to \mathbb{C}$ es analítica en A.*

Corolario 2.1. *El espacio $\mathcal{H}_K$ es un RKHS de funciones enteras si y sólo si el núcleo $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es una función entera.*

Presentaremos ahora otra manera de estudiar la analiticidad de las funciones en $\mathcal{H}_K$. Concretamente, haremos uso del desarrollo de $K(z)$, con $z \in \mathbb{C}$, respecto a una base de Riesz en $\mathcal{H}$, cuyos coeficientes son elementos en $\mathcal{H}_K$ los cuales usaremos reiteradamente en adelante. La analiticidad de estos será una de las condiciones a tener en cuenta en el estudio de esta propiedad para cualquier función en el espacio $\mathcal{H}_K$.

Antes de de entrar a estudiar los detalles, presentamos algunos elementos básicos de la teoría de bases de Riesz y de *frames*, algunos de los cuales serán fundamentales en la prueba de resultados futuros tanto en este capítulo, como en el siguiente, relacionado con la teoría de muestreo analítico en $\mathcal{H}_K$.

Algunos resultados sobre Bases de Riesz

Definición 2.2. *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert separables. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_2$ se denomina base de Riesz si existe un operador lineal acotado e invertible*

$$A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$$

y una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}_1$, tal que $Ae_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que puesto que A es biyectivo, entonces trivialmente A^{-1} es lineal y además, de acuerdo al teorema del operador inverso de Banach, $A^{-1} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ es continuo. En nuestro caso, basta considerar $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ el espacio de Hilbert separable alrededor del cual hemos desarrollado la teoría precedente.

Al igual que con las bases ortonormales, todo elemento del espacio tiene una representación en serie respecto a una base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dado $x \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$y = A^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \, e_n,$$

es decir,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \, Ae_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \, x_n. \tag{2.12}$$

Por lo tanto, por la unicidad del desarrollo (2.12), toda base de Riesz es en particular una base de Schauder.

Además, respecto a los coeficientes $\langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}$ del desarrollo (2.12) obsérvese lo siguiente: el funcional $x \longmapsto \langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}$ es acotado. En efecto

$$|\langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|y\| \leq \|A^{-1}\|\|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Por el teorema de representación de Riesz, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único elemento x_n^* tal que $\langle x, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} = \langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}$

A la sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ se le denomina base de Riesz dual de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, también es base de Riesz y verifica una condición de biortogonalidad. Por ser de gran importancia futura el uso de pares de bases de Riesz duales en capítulos posteriores relacionados con muestreo, en el teorema 2.2 se prueban estas propiedades (véanse [9] y [40] por ejemplo).

Teorema 2.2. ***(Teorema de la base de Riesz)***

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de Riesz para el espacio de Hilbert separable complejo $\mathcal{H}$. Entonces, existe una única sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ tal que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} \, x_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} \, x_n^* , \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ también es una base de Riesz. Además, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ son bases biortogonales; es decir,

$$\langle x_n, x_m^* \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{n,m}.$$

Demostración. Puesto que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$, consideremos $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal en este espacio y A un operador lineal biyectivo acotado tal que $Ae_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como A^{-1} es acotado, entonces también lo es $(A^{-1})^*$. Al desarrollar $A^{-1}x$ respecto a dicha base ortonormal, con $x \in \mathcal{H}$, obtenemos

$$A^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle A^{-1}x, e_n \right\rangle_{\mathcal{H}} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle x, (A^{-1})^* e_n \right\rangle_{\mathcal{H}} e_n$$

con lo cual,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle x, (A^{-1})^* e_n \right\rangle_{\mathcal{H}} A e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} \, x_n$$

en donde $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(A^{-1})^* e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es también una base de Riesz porque el operador lineal $(A^{-1})^*$ es un isomorfismo.

Para probar la validez del segundo desarrollo en (2.13), de todo elemento $x \in \mathcal{H}$ respecto a $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, basta seguir el razonamiento anterior, desarrollando A^*x en términos de la base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Ae_n\rangle_{\mathcal{H}} (A^*)^{-1} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n^*, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{2.14}$$

La unicidad se sigue de la igualdad $\langle x, x_n^*\rangle_{\mathcal{H}} = \langle y, e_n\rangle_{\mathcal{H}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, probaremos la condición de biortogonalidad de las bases de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\langle x_n, x_m^*\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle Ae_n, (A^{-1})^* e_m\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle A^{-1}Ae_n, e_m\right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle e_n, e_m\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{n,m}. \tag{2.15}$$

con lo cual concluye la prueba.

□

Dado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{Ae_n\}_{n=1}^{\infty}$ es posible caracterizar a la base $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ aplicando el operador adjunto de A^{-1} a la base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$; esto permite comprobar de acuerdo a la definición de base de Riesz, que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la base dual de $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Teniendo en cuenta que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, obtenemos:

$$\left\{\left(\left(\left(A^{-1}\right)^*\right)^{-1}\right)^* e_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \{Ae_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},$$

con lo cual, se tiene la existencia del par de bases de Riesz duales. Además, cuando el operador A es unitario, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base ortonormal y de hecho, coincide con su base dual.

Entre las propiedades fundamentales de las bases de Riesz destacamos algunas que utilizaremos posteriormente:

La primera propiedad proporciona un par de condiciones equivalentes que permiten determinar cuándo una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base Riesz. Esta propiedad también es utilizada para dar una definición equivalente de base de Riesz:

(a) Para una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.

(ii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completa en $\mathcal{H}$ y existen constantes $a, b > 0$ tales que para toda sucesión $\{c_n\}$ en $\ell^2(\mathbb{N})$, se cumple la desigualdad

$$a\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2 \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2. \tag{2.16}$$

Las constantes a y b se denominan cotas de la base de Riesz y sus estimativas alcanzan el mayor valor $\left\|A^{-1}\right\|^{-2}$ para a y el menor valor $\left\|A\right\|^2$ para b.

Nótese que, de acuerdo al teorema de Riesz-Fischer, los espacios $\ell^2(\mathbb{N})$ y $\mathcal{H}$ son isomorfos mediante la aplicación $\{c_n\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$.

La siguiente propiedad, será utilizada más adelante en la prueba del teorema 2.3 en el cual, como se afirmó en la introducción de esta sección, se presentará otra forma de probar la analiticidad de las funciones pertenecientes al espacio $\mathcal{H}_K$.

(b) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de Riesz de $\mathcal{H}$. Entonces, existen constantes $a, b > 0$ tales que

$$a\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq b\|x\|_{\mathcal{H}}^2, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{2.17}$$

Las constantes a y b coinciden con las constantes óptimas en (2.16).

Para encontrar los valores de tales cotas nótese el siguiente hecho: para todo x en $\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left\langle x, x_n\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left\langle x, Ae_n\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left\langle A^*x, e_n\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \\ &= \|A^*x\|^2 \qquad (2.18) \\ &\leq \|A^*\|^2\|x\|^2 = \|A\|^2\|x\|^2. \qquad (2.19) \end{aligned}$$

La estimativa de la derecha en (2.17) se deduce de (2.19). Para la desigualdad de la izquierda basta hacer

$$\|x\|_{\mathcal{H}} = \|(A^*)^{-1}A^*x\|_{\mathcal{H}} \leq \|(A^*)^{-1}\|\|A^*x\| = \|A^{-1}\|\|A^*x\|.$$

y utilizar (2.18) **.**

Además, es importante destacar lo siguiente: esta propiedad usualmente se emplea para definir el concepto de *frame* en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$; esto es, una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un *frame* para $\mathcal{H}$ si existen tales constantes $a, b > 0$ (en este caso, denominadas cotas del *frame*), tales que se verifica (2.17). Los valores óptimos son, para a la más grande de las cotas inferiores y para b la más pequeña de las cotas superiores. En consecuencia, toda base de Riesz es un *frame*; aunque el recíproco no es verdad en general, puesto que si bien es cierto que un *frame* posee muchas propiedades de las bases, el problema consiste en que el desarrollo de todo elemento $x \in \mathcal{H}$ respecto a un *frame* no es único porque es posible elegir distintas sucesiones de coeficientes en tal expansión. Además, cuando $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un *frame* que no es base de Riesz, la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = 0 \tag{2.20}$$

para alguna sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\ell^2(\mathbb{N})$, no necesariamente implica que $\alpha_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso estaríamos hablando en forma un poco coloquial de una especie de "dependencia lineal" en el infinito y el *frame* se dice que es redundante o en inglés, " overcomplete". Dado un *frame* " overcomplete" $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existen distintos *frames* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ llamados *frames* duales, para los cuales, para cada $x \in \mathcal{H}$, se cumple el desarrollo [40],

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n,$$

en el espacio $\mathcal{H}$.

El siguiente resultado da condiciones para que un *frame* sea una base de Riesz:

(c) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un *frame* para $\mathcal{H}$. las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.

(ii) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = 0$, para alguna sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ perteneciente a $\ell^2(\mathbb{N})$, entonces, $\alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cuando una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple la condición (ii) se dice que es ω-independiente. Además, se dice que un *frame* es exacto si al quitarle cualquier elemento, deja de ser un *frame*. Una condición necesaria y suficiente para que un *frame* sea una una base de Riesz es que sea exacto. En [9], [37], [40] y [41] entre otros, se encuentra más información acerca de la teoría de *frames*.

Una vez hecho este rápido recorrido dentro de la teoría de las bases de Riesz, retornamos a nuestro problema acerca de la analiticidad de las funciones pertenecientes al RKHS $\mathcal{H}_K$ proveniente del núcleo $K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}$. Para tal efecto, supongamos la existencia en el espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ de un par de bases de Riesz duales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo, utilizando (2.13), hacemos el desarrollo de $K(z)$ respecto a la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ obteniendo

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K(z), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}\, x_n, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.21}$$

Denotamos los coeficientes $\langle K(z), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}$ del anterior desarrollo, los cuales para cada $n \in \mathbb{N}$ son funciones en la variable z, como

$$S_n(z) := \langle K(z), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.22}$$

Nótese que $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones enteras en $\mathcal{H}_K$ y para cada $z \in \mathbb{C}$, $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{N})$.

En el siguiente teorema, usaremos dicha sucesión de funciones $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ para estudiar la analiticidad de cualquier función en el espacio $\mathcal{H}_K$:

Teorema 2.3. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ un par de bases de Riesz biortogonales en $\mathcal{H}$. Entonces, el espacio $\mathcal{H}_K$ proveniente del núcleo $K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un RKHS de funciones enteras si y sólo si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones enteras y la función $z \longmapsto \|K(z)\|_{\mathcal{H}}$ es acotada en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Para la condición suficiente, (usando el corolario 1.1 del teorema 1.1 [109, p. 266]) basta probar que K es analítico en $\mathbb{C}$, verificando que para todo $x \in \mathcal{H}$, la aplicación $f(z) = \langle K(z), x\rangle$ es entera. Utilizando la igualdad (2.21) y teniendo en cuenta la continuidad del producto interior, tenemos:

$$\langle K(z), x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z)x_n, x \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) \langle x_n, x\rangle_{\mathcal{H}} . \tag{2.23}$$

Y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce que:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \sum_{n=1}^{N} S_n(z)x_n, x \right\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{N} S_n(z) \langle x_n, x\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \left|S_n(z)\right|^2\right) \left(\sum_{n=1}^{N} \left|\langle x_n, x\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|S_n(z)\right|^2 \left(\sum_{n=1}^{N} \left|\langle x_n, x\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2\right) \\ &\leq b\left\|K(z)\right\|^2 \left(\sum_{n=1}^{N} \left|\langle x_n, x\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2\right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

En (2.24) se ha usado la desigualdad (2.17) de la página 26, correspondiente a la propiedad **(b)** de las bases de Riesz: basta tomar $K(z) \in \mathcal{H}$, para cada $z \in \mathbb{C}$ y la sucesión $S_n(z)$ (definida en (2.22)) de coeficientes de su desarrollo en términos de la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteniendo

$$a\,\|K(z)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left\langle K(z), x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \leq b\,\|K(z)\|^2$$

o lo que es igual,

$$a\,\|K(z)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|S_n(z)\right|^2 \leq b\,\|K(z)\|^2 \tag{2.25}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y para ciertas cotas a, b tales que $0 < a \leq b$.

Por lo tanto, se ha probado que las sumas parciales de la serie (2.23) son equiacotadas en compactos de $\mathbb{C}$, luego, aplicando el teorema de Montel, existe una subsucesión uniformemente convergente en compactos de $\mathbb{C}$ la cual debe converger a $f(z)$ y en consecuencia, se tiene que $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$.

La condición necesaria es inmediata. □

2.5. Algunos ejemplos de espacios $\mathcal{H}_K$

Concluimos este capítulo presentando unos cuantos ejemplos interesantes de espacios $\mathcal{H}_K$. Entre ellos, aparece en el ejemplo 2.4, siguiendo las ideas mencionadas en el capítulo 1 acerca del orígen del teorema de Kramer, un núcleo K asociado a un problema de Sturm-Liouville regular. También, es importante mencionar el uso de núcleos discretos los cuales aparecen en el ejemplo 2.3. Estos últimos junto a sus correspondientes espacios $\mathcal{H}_K$ se usarán reiteradamente en los capítulos siguientes.

Ejemplo 2.1. ***(El espacio de Paley-Wiener*** PW_π***)***

Consideremos $\mathcal{H} = L^2([-\pi,\pi])$. Se define el espacio de Paley-Wiener PW_π de funciones cuadrado integrable y banda limitada al intervalo $[-\pi,\pi]$,

$$PW_\pi = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad \text{supp}\widehat{f} \subseteq [-\pi,\pi] \right\}$$

en donde $\widehat{f}$ denota la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \mathrm{e}^{-iz\omega} dz$$

de f, con $\widehat{f} \in L^2[-\pi,\pi]$.

El espacio PW_π es un ejemplo de un RKHS $\mathcal{H}_K$, usando como operador $\mathcal{T}_K$ (en este caso unitario) a la transformada de Fourier y el núcleo K es el de Fourier, el cual se define mediante la aplicación

$$\begin{array}{rccc} K & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[-\pi,\pi] \\ & & z & \longmapsto & K(z) \end{array}, \qquad [K(z)](\omega) = \frac{\mathrm{e}^{iz\omega}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \omega \in [-\pi,\pi].$$

En efecto, toda función $f \in PW_\pi$ puede ser representada mediante el producto interior

$$f(z) = \left\langle \frac{\mathrm{e}^{iz\omega}}{\sqrt{2\pi}}, \overline{\widehat{f}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega) \mathrm{e}^{iz\omega} d\omega$$

para cada $z \in \mathbb{C}$; con lo cual de acuerdo a (2.1) obtenemos

$$f(z) = \left\langle K(z), \overline{\widehat{f}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]},$$

y por lo tanto,

$$PW_\pi = \left\{ f \, : f(z) = \left\langle \mathrm{e}^{iz\omega}/\sqrt{2\pi}, \overline{\widehat{f}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}, \; \widehat{f} \in L^2[-\pi,\pi] \right\}. \tag{2.26}$$

En consecuencia, $PW_\pi = \mathcal{H}_K$ y su núcleo reproductor es

$$\kappa(z,w) = \frac{\sin \pi(z-\overline{w})}{\pi(z-\overline{w})}, \quad z,\omega \in \mathbb{C}.$$

En el espacio de Paley-Wiener PW_π es posible trabajar sobre subespacios cuyos elementos son únicamente funciones impares o funciones pares. Utilizando núcleos K adecuados, es posible construir espacios $\mathcal{H}_K$ de funciones enteras que igualmente serán impares o pares.

Ejemplo 2.2. ***(Transformadas seno y coseno finitas)***

Consideremos el siguiente par de aplicaciones

$$\begin{array}{rcccc} K_s & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[0,\pi] \\ & & z & \longmapsto & K_s(z) \end{array}, \quad [K_s(z)](x) := \operatorname{sen}(zx), \quad x \in [0,\pi].$$

y

$$\begin{array}{rcccc} K_c & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[0,\pi] \\ & & z & \longmapsto & K_c(z) \end{array}, \quad [K_c(z)](x) := \cos(zx), \quad x \in [0,\pi].$$

Si $f \in PW_\pi$ es una función impar, entonces es posible representarla mediante el producto interior

$$f(z) = \langle \operatorname{sen}(zx), F(x) \rangle_{L^2[0,\pi]}, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde $F \in L^2[0,\pi]$. Análogamente, Si f es una función par del espacio PW_π, entonces,

$$f(z) = \langle \cos(zx), F(x) \rangle_{L^2[0,\pi]}, \quad z \in \mathbb{C},$$

con $F \in L^2[0,\pi]$.

Por lo tanto, los núcleos $K_s : \mathbb{C} \to L^2[0,\pi]$, y $K_c : \mathbb{C} \to L^2[0,\pi]$ anteriormente definidos inducen un par de espacios $\mathcal{H}_{K_s}$ y $\mathcal{H}_{K_c}$

$$\mathcal{H}_{K_s} = \left\{ f \, : f(z) = \langle \operatorname{sen}(zx), F \rangle_{\mathcal{H}}, \; F \in L^2[0,\pi] \right\}. \tag{2.27}$$

y

$$\mathcal{H}_{K_c} = \left\{ f \, : f(z) = \langle \cos(zx), F \rangle_{\mathcal{H}}, \; F \in L^2[0,\pi] \right\}. \tag{2.28}$$

$\mathcal{H}_{K_s}$ corresponde al espacio de funciones impares en PW_π mientras que $\mathcal{H}_{K_c}$ corresponde al espacio de funciones pares en PW_π.

Ejemplo 2.3. ***(Un espacio $\mathcal{H}_K$ con núcleo K discreto)***

En el siguiente ejemplo (véase [57]) hacemos referencia a un núcleo discreto K definido en términos de polinomios ortonormales relacionados con el problema indeterminado de momentos de Hamburger (o de Stieltjes), el cual, asociado al muestreo, se estudiará con mayor profundidad en la sección 3.3. Debido a que dicho núcleo es importante para nuestros propósitos, en este ejemplo únicamente nos interesa emplearlo para ilustrar un caso mas de un espacio $\mathcal{H}_K$. Posteriormente, aparecerá en diferentes secciones: en la sección 3.3 se caracterizará como un núcleo analítico de Kramer y en consecuencia, en el ejemplo 3.4 de la página 50 se usará como un núcleo apropiado para ilustrar un teorema discreto de Kramer. También aparece en la sección 4.3.1, en el teorema 4.3, página 78, donde está asociado a una fórmula de muestreo tipo-Lagrange y finalmente, en el ejemplo 5.4 de la página 112 aparece para exhibir al espacio $\mathcal{H}_K$ correspondiente, como ejemplo de un espacio de De Branges.

Sean el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}_0)$ donde $N_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y la aplicación $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ definida por $[K(z)](n) := P_n(z)$ donde $\{P_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ denota una sucesión de polinomios ortonormales asociados con un problema indeterminado de momentos de Hamburger o de Stieltjes. En [1] se prueba que si el problema de momentos es indeterminado, entonces, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |P_n(z)|^2 < \infty$. El RKHS inducido por este núcleo es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_K &= \Big\{f \;: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = \big\langle P_n(z), c_n \big\rangle,\ \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)\Big\}. \\ &= \left\{f \;: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),\ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)\right\}.\end{aligned}$$

Como último ejemplo de la sección, presentamos un espacio $\mathcal{H}_K$ proveniente de un núcleo K asociado a un problema de Sturm-Liouville regular.

Ejemplo 2.4. ***(Un núcleo K asociado a un problema de Sturm-Liouville regular)***

Consideremos el problema de Sturm-Liouville regular, [119]

$$Ly = -zy, \qquad x \in [a, b] \tag{2.29}$$

$$\cos\alpha\, y(a) + \operatorname{sen}\alpha\, y'(a) = 0 \tag{2.30}$$

$$\cos\beta\, y(b) + \operatorname{sen}\beta\, y'(b) = 0 \tag{2.31}$$

donde L es el operador diferencial $Ly = y''(x) - p(x)y$ y α y β son valores dados en las condiciones separadas de frontera (2.30) y (2.31). L es regular si $[a, b]$ es acotado, y además, la función $p(x) \in \mathcal{C}(a, b)$ alcanza límites finitos cuando $x \to a^+$ e $y \to b^-$.

Es conocido (véase [42, p. 189]) que este tipo de problema de Sturm-Liouville regular define un operador autoadjunto, con espectro discreto. El conjunto de valores propios $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del operador L es real y como las condiciones de frontera son separadas, entonces, para cada n, z_n es simple; es decir, existe exactamente una función propia linealmente independiente asociada a z_n. Además, la sucesión $\{z_n\}$ es creciente, acotada inferiormente y $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$ [111].

Del conjunto de soluciones de (2.29), es posible elegir una solución particular $\Phi(x,z)$ (real cuando z es real y entera como función de z [111]), la cual satisface la condición (2.30) o bien otra solución que verifica (2.31). Supongamos que $\Phi(x,z)$ es solución de (2.29) tal que

$$\Phi(a,z) = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \Phi'(a,z) = -\cos\alpha.$$

Es evidente que $\Phi(x,z)$ satisface la primera condición de frontera (2.30). En este caso, los valores propios $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el único conjunto posible de valores de z para los cuales $\Phi(x,z)$ satisface la segunda condición de frontera (2.31); es decir, son las raíces de la ecuación

$$\cos\beta\ \Phi(b,z) + \operatorname{sen}\beta\ \Phi'(b,z) = 0.$$

Por lo tanto, las funciones propias de este problema de Sturm-Liouville son salvo un factor constante $\{\Phi(x,z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Estas funciones propias son reales y conforman una base ortogonal de $L^2(a,b)$.

En ese contexto, nuestro núcleo K se define mediante la aplicación $K : \mathbb{C} \to L^2[a,b]$, dada por

$$[K(z)](x) := \Phi(x,z), \quad x \in [a,b]. \tag{2.32}$$

con lo cual, el espacio $\mathcal{H}_K$ correspondiente está constituído por el conjunto de funciones de la forma

$$f(z) = \langle K(z), F\rangle = \int_a^b \Phi(x,z)\overline{F(x)}dx$$

para $F \in L^2(a,b)$. Toda función en este espacio es entera, de orden $1/2$ y tipo τ, donde $0 \le \tau \le b-a$, (véase [120]).

3

Teoría de muestreo en $\mathcal{H}_K$

En el capítulo anterior construimos el espacio $\mathcal{H}_K$ como un espacio de Hilbert de funciones enteras con núcleo reproductor, el cual proviene de un núcleo analítico K. Dicho espacio será el escenario en el cual desarrollaremos algunos elementos de muestreo en éste y en los siguientes capítulos. En concreto, estamos interesados en estudiar en $\mathcal{H}_K$ la existencia de un conjunto de muestreo; esto es, la existencia de una sucesión de puntos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ y una sucesión de funciones muestrales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que una fórmula de muestreo como

$$f(z) = \sum_n f(z_n) S_n(z)\,, \quad z \in \mathbb{C},$$

sea válida para todo $f \in \mathcal{H}_K$. La convergencia de esta serie será absoluta y uniforme en conjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

En primer lugar, en la sección 3.1 introduciremos los núcleos analíticos de Kramer y a continuación, en el teorema 3.1 usando bases de Riesz, probaremos una fórmula de muestreo no ortogonal válida en $\mathcal{H}_K$, en donde K es ahora un núcleo analítico de Kramer. Se probará la existencia de tales núcleos para cualquier sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. El mencionado teorema 3.1 es una versión abstracta del clásico teorema de muestreo de Kramer en $\mathcal{H}_K$ (véase [81]).

Por otra parte, en la sección 3.3 se demostrará un resultado inverso; esto es, suponiendo la existencia de uná fórmula de muestreo en el espacio $\mathcal{H}_K$, se darán las condiciones bajo las cuales K pueda ser considerado un núcleo analítico de Kramer y la fórmula de mustreo correspondiente sea la dada por el teorema 3.1. Finalmente, en la sección 3.4 se probará una fórmula de muestreo en donde se hace uso de muestras de alguna función $\widetilde{f}$ que guarda cierta relación con f, la función a recuperar. En particular usaremos como función relacionada la primera derivada de f.

Estos resultados se ilustrarán convenientemente en el espacio PW_π utilizando como función relacionada la transformada de Hilbert.

3.1. Núcleos analíticos de Kramer

Definición 3.1. *El núcleo analítico $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ se denomina núcleo analítico de Kramer si existen sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y una base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de $\mathcal{H}$, tales que*

$$K(z_n) = a_n x_n, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Obsérvese que la aplicación K puede ser un núcleo analítico de Kramer respecto a diferentes conjuntos de datos:

$$\{z_n\}_{n=1}^\infty \text{ en } \mathbb{C}\,, \{a_n\}_{n=1}^\infty \text{ en } \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \text{y } \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ en } \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Por ejemplo, el núcleo de Fourier también es un núcleo analítico de Kramer respecto a $\{z_n = n + \alpha\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\{a_n = 1\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

En la siguiente proposición se prueba que una condición necesaria y suficiente para que K sea un núcleo analítico de Kramer respecto al conjunto de datos (3.2) es que la sucesión de funciones $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{H}_K$ definidas en (2.22) verifiquen una propiedad de tipo interpolatorio.

Proposición 3.1. *La aplicación $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es un núcleo analítico de Kramer respecto a los datos (3.2) si y solamente si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones en $\mathcal{H}_K$ dadas por*

$$S_n(z) := \big\langle K(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

donde $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ es la base de Riesz dual de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, satisface una condición de tipo interpolatoria respecto a una sucesión compleja $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, es decir, $S_n(z_k) = a_n \delta_{n,k}$.

Demostración. Supongamos que K es un núcleo analítico de Kramer. Haciendo uso de la condición de biortogonalidad entre la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y su base dual $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ obtenemos

$$\begin{aligned} S_n(z_k) &= \big\langle K(z_k), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle a_k x_k, x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= a_k \big\langle x_k, x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} = a_k\, \delta_{n,k}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Recíprocamente, supongamos que la sucesión de funciones $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ satisface la condición $S_n(z_k) = a_k\, \delta_{n,k} = \langle a_k x_k, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}$. Teniendo en cuenta (3.3), $S_n(z_k) = \big\langle K(z_k), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}}$;

en consecuencia, $\langle a_k x_k, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} = \langle K(z_k), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}$ y por lo tanto, $K(z_k) = a_k x_k$, es decir, K es un núcleo analítico de kramer respecto a las sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$.

□

Dado un núcleo analítico de Kramer se obtiene una versión abstracta del clásico teorema de muestreo de Kramer [81] donde las funciones $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ aparecerán como las funciones muestrales. En [52], se demostró una fórmula de muestreo (ortogonal, usando bases ortonormales) para recuperar funciones en el espacio $\mathcal{H}_K$. Con nuestra definición de núcleo analítico de Kramer, el desarrollo muestral resultará ser no ortogonal puesto que $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.1. ***(Teorema de muestreo analítico de Kramer)***

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ un núcleo analítico de Kramer respecto al conjunto de datos (3.2) y $\mathcal{H}_K$ su correspondiente RKHS de funciones enteras.

Entonces, toda función f en $\mathcal{H}_K$ puede ser recuperada a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ por medio de la serie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{a_n} S_n(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.5}$$

donde las funciones muestrales están dadas por (2.22). La convergencia de la serie (3.5) es absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Puesto que K es un núcleo analítico de Kramer respecto a los datos (3.2) sabemos que

$$K(z_n) = a_n x_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Obsérvese que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ puesto que en caso contrario, la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión acotada y en consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n \equiv 0$ debido al principio de los ceros aislados, lo cual contradice la propiedad interpolatoria (3.4).

Sea $x \in \mathcal{H}$ cuyo desarrollo respecto a la base dual $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ de la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n^*$. Entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \langle K(z), x \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\langle K(z), \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle x, x_n\rangle_{\mathcal{H}}}\,\langle K(z), x_n^*\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\left\langle x, \frac{K(z_n)}{a_n}\right\rangle_{\mathcal{H}}}\,\langle K(z), x_n^*\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{K(z_n)}{a_n}, x\right\rangle_{\mathcal{H}}\,\langle K(z), x_n^*\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}\,\langle K(z_n), x\rangle_{\mathcal{H}}\, S_n(z) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{a_n} S_n(z), \quad z \in \mathbb{C}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

La convergencia de (3.7) es puntual en $\mathbb{C}$. Por otra parte, debido a que el operador antilineal $\mathcal{T}_K$ definido en (2.1) es un isomorfismo isométrico entre los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_K$, deducimos en consecuencia que la sucesión $\{\mathcal{T}_K(x_n^*) = S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}_K$. Por lo tanto, si $\{T_n = \mathcal{T}_K(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es su base dual, aplicando el desarrollo (2.14) a cualquier elemento $f \in \mathcal{H}_K$ obtenemos para cada $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, T_n\rangle_{\mathcal{H}_K}\, S_n(z)$$

donde,

$$\big\langle f, T_n\big\rangle_{\mathcal{H}_K} = \overline{\langle x, x_n\rangle_{\mathcal{H}}} = \left\langle \frac{K(z_n)}{a_n}, x\right\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{f(z_n)}{a_n}. \qquad (3.8)$$

Puesto que toda base de Riesz es base incondicional, la serie (3.7) converge puntual e incondicionalmente y por tanto absolutamente en $\mathcal{H}_K$. Además, la convergencia uniforme se cumple en en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ de acuerdo a la propiedad **4** de la página 22 puesto que la función $z \longmapsto \|K(z)\|_{\mathcal{H}_K}$ es acotada en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

$\square$

Debido a que $\{T_n = \mathcal{T}_K(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}_K$, nótese que al utilizar la desigualdad (2.17) de la página 26, simultáneamente con (3.8), se garantiza la existencia de las cotas $a, b > 0$ tales que

$$a\big\|f\big\|_{\mathcal{H}_K}^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\big|f(z_n)/a_n\big|^2 \le b\big\|f\big\|_{\mathcal{H}_K}^2, \quad f \in \mathcal{H}_K,$$

con lo cual, la expresión

$$|||f||| := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big|f(z_n)/a_n\big|^2\right)^{1/2} \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

define una norma equivalente en el espacio $\mathcal{H}_K$.

Existencia de núcleos analíticos de Kramer

En este apartado nos ocupamos de probar la existencia de núcleos analíticos de Kramer K introducidos en la definición 3.1, asociados a sucesiones complejas arbitrarias $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. Para tal efecto, dada $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que la serie

$$\sum_{z_n \neq 0} \left| \frac{a_n}{z_n} \right|^2$$

converge. Si $z_k = 0$, tomaremos $a_k = 1$.

Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de Riesz en el espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, y $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ su base dual. Definimos la aplicación $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ como

$$K(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n Q(z)}{z - z_n} x_n, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.9}$$

donde $Q(z)$ es una función entera tal que $Q(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; la existencia de Q es posible de acuerdo al teorema de factorización de Weierstrass [116, p. 49]. La convergencia de (3.9) es en la norma de $\mathcal{H}$. Si definimos las funciones $S_n(z) := \langle K(z), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}$, entonces

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j Q(z)}{z - z_j} x_j, x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j Q(z)}{z - z_j} \langle x_j, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j Q(z)}{z - z_j} \delta_{j,n} \\ &= \frac{a_n Q(z)}{z - z_n}, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

lo que prueba que S_n es una función entera para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además, S_n satisface una propiedad de tipo interpolatorio en $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. En efecto, puesto que para $n \in \mathbb{N}$, $Q(z_n) = 0$, obtenemos

$$S_n(z_m) = \begin{cases} \dfrac{a_n Q(z_m)}{z_m - z_n} = 0, & m \neq n \\[2ex] \lim\limits_{z \to z_n} \dfrac{a_n Q(z)}{z - z_n} = a_n Q'(z_n), & m = n. \end{cases} \tag{3.11}$$

Veamos ahora que la aplicación $z \longmapsto \|K(z)\|_{\mathcal{H}}$ es uniformemente acotada en compactos de $\mathbb{C}$. Teniendo en cuenta que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$, usando la desigualdad (2.16) de la página 26, existe una constante positiva C tal que,

$$\|K(z)\|^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n Q(z)}{z - z_n} \right|^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Consideremos además $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $\Omega \neq \emptyset$, y $\overline{D(0,R)}$ disco cerrado de radio $R > 0$ con centro en el origen que contiene a Ω. Entonces, salvo para un conjunto finito de puntos $\{z_j\}$, donde $j \in \Lambda_R \subset \mathbb{N}$, tenemos

$$|z_n| - R \leq |z_n| - |z| \leq ||z_n| - |z|| = ||z| - |z_n|| \leq |z - z_n|$$

para todo $z \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N} \backslash \Lambda_R$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n Q(z)}{z - z_n} \right|^2 &= \sum_{n \in \Lambda_R} \left| \frac{a_n Q(z)}{z - z_n} \right|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N} \backslash \Lambda_R} \left| \frac{a_n Q(z)}{z - z_n} \right|^2 \\ &\leq \sum_{n \in \Lambda_R} \left| \frac{a_n Q(z)}{z - z_n} \right|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N} \backslash \Lambda_R} \frac{|a_n Q(z)|^2}{(|z_n| - |R|)^2}. \end{aligned}$$

La primera suma de la derecha es finita y la segunda está acotada en Ω; consecuentemente, $\|K(z)\|$ es uniformemente acotado en compactos de $\mathbb{C}$ y de acuerdo al teorema 2.3, K es una función entera que verifica las condiciones de la definición 3.1; es decir, K es un núcleo analítico de Kramer.

Por lo tanto, aplicando el teorema 3.1, es posible encontrar una fórmula de muestreo en el espacio correspondiente $\mathcal{H}_K$. Para tal efecto, obsérvese que la fórmula (3.5) puede ser escrita en la forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{S_n(z_n)} S_n(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.12}$$

Además, por (3.11), $S_n(z_n) = a_n Q'(z_n)$; con lo cual, sustituyendo en (3.12) obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{\dfrac{a_n Q(z)}{z - z_n}}{a_n Q'(z_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n) Q'(z_n)}. \tag{3.13}$$

En consecuencia, toda función f en $\mathcal{H}_K$ puede ser recuperada por medio de una serie interpolatoria tipo-Lagrange, temática ésta que se tratará en el siguiente capítulo.

3.2. Algunos ejemplos de fórmulas de muestreo

Ejemplo 3.1. ***(El teorema de Whittaker-Shannon-Kotelnikov)***

En el espacio de Paley-Wiener PW_π, el núcleo de Fourier $[K(z)](\omega) = \mathrm{e}^{iz\omega}/\sqrt{2\pi}$ es un ejemplo de núcleo analítico de Kramer respecto a las sucesiones $\{z_n = n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{a_n = 1\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y la base ortonormal $\left\{\mathrm{e}^{in\omega}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[-\pi,\pi]$. Desarrollando K respecto a esta base se obtiene

$$K(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle \mathrm{e}^{iz\omega}, \mathrm{e}^{in\omega}\right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \frac{\mathrm{e}^{in\omega}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S_n(z)\frac{\mathrm{e}^{in\omega}}{\sqrt{2\pi}},$$

en donde las funciones muestrales son $S_n(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\pi(z-n)}{\pi(z-n)}$.

En consecuencia, el teorema de Whittaker-Shannon-Kotelnikov garantiza que toda función f en el espacio de Paley-Wiener PW_π puede ser recuperada a través de sus muestras en la sucesión $\{z_n = n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ por medio de la serie muestral

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\operatorname{sen}\pi(z-n)}{\pi(z-n)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.14}$$

y puesto que $\|K(z)\|_{L^2[-\pi,\pi]} \le \mathrm{e}^{\pi|y|}$ para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la convergencia de la serie (3.14) es absoluta y uniforme en bandas horizontales de $\mathbb{C}$.

La fórmula 3.14) en el espacio PW_π es un caso particular de la fórmula de muestreo (3.5) del teorema 3.1.

Además, nótese que el núcleo de Fourier K también es un núcleo analítico respecto a las sucesiones $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ y $\{a_n = 1\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cuando los puntos t_n satisfacen la condición de Kadec, $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |t_n - n| < \frac{1}{4}$. Esto último implica que $\left\{\mathrm{e}^{it_n\omega}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2[-\pi,\pi]$ (véase [116, p. 36]).

Ejemplo 3.2. ***(Muestreo asociado a problemas de Sturm-Liouville regulares)***

En este ejemplo retomamos el RKHS $\mathcal{H}_K$ construido en el ejemplo 2.4, cuyo núcleo $[K(z)](x) := \Phi(x,z)$ se obtuvo a partir del problema regular de Sturm-Liouville

$$Ly = -zy, \qquad x \in [a,b] \tag{3.15}$$

$$\cos\alpha\, y(a) + \operatorname{sen}\alpha\, y'(a) = 0 \tag{3.16}$$

$$\cos\beta\, y(b) + \operatorname{sen}\beta\, y'(b) = 0. \tag{3.17}$$

Recordemos brevemente que $\Phi(x,z)$ es una solución particular de (3.15), entera en z y que satisface la condición de frontera (3.16). Además sabemos que las funciones propias $\{\Phi(x, z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ forman una base ortogonal de $L^2(a, b)$ donde $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de valores propios del problema.

De acuerdo a lo mencionado en el capítulo introductorio, el problema de Sturm-Liouville regular (3.15)-(3.17) es un problema tipo Kramer (véase de nuevo el ejemplo 2.4 para estudiar en detalle las condiciones del problema), en consecuencia, toda función en el espacio $\mathcal{H}_K$ puede ser recuperada mediante una fórmula de muestreo tipo-Lagrange (véanse [48], [49], [117], [120] entre otros).

En concreto, sea f una función en $\mathcal{H}_K$, la cual escribimos como

$$f(z) = \big\langle K(z), F\big\rangle\mathcal{H}_K = \int_a^b \Phi(x, z)\overline{F(x)}dx, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Entonces, f puede ser recuperada a partir de la sucesión de sus muestras $f(z_n)$ mediante la serie interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n)\frac{Q(z)}{(z - z_n)Q'(z_n)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.18}$$

donde $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de valores propios del operador L y Q es una función entera la cual podemos expresar en la forma

$$Q(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{z_n}\Big), \quad z \in \mathbb{C},$$

si ningún valor propio es cero, o

$$Q(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{z_n}\Big), \quad z \in \mathbb{C},$$

si alguno de los valores propios, por ejemplo z_0, es cero. La convergencia de la serie en (3.18) es absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{C}$.

En particular, consideremos el siguiente problema de Sturm-Liouville regular (tomado de [119]), con $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\tan\alpha \neq \pi$:

$$Ly = -zy = -z^2y, \quad x \in [0, \pi] \tag{3.19}$$

$$\cos\alpha\, y(a) + \operatorname{sen}\alpha\, y'(a) = 0 \tag{3.20}$$

$$y(\pi) = 0 \tag{3.21}$$

En este caso $\beta = 0$. Una solución particular de (3.19) la cual satisface la condición de frontera (3.20) es

$$\Phi(x, z^2) = \cos xz - \cot\alpha\frac{\operatorname{sen} xz}{z},$$

la cual es entera en la variable z, par, de tipo exponencial π y no se anula para ningún valor de z puesto que $\Phi(0, z^2) = 1$.

Los valores propios del problema son las raíces cuadradas de las soluciones de la ecuación

$$\cos \pi z - \cot \alpha \frac{\operatorname{sen} \pi z}{z} = 0.$$

Por lo tanto, si z_k^2 es el k-ésimo valor propio del problema, el conjunto de funciones propias asociado a z_k^2 es

$$\left\{ \Phi(x, z_k^2) = \cos z_k x - \cot \alpha \frac{\operatorname{sen} z_k x}{z_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Además, $z_k = 0$ no es un valor propio puesto que $\tan \alpha \neq \pi$. Entonces, si

$$f(z) = \left\langle K(\cdot, z^2), F \right\rangle = \int_0^\pi \left(\cos xz - \cot \alpha \frac{\operatorname{sen} xz}{z} \right) \overline{F(x)} dx, \quad z \in \mathbb{C}, \quad F \in L^2(0, \pi)$$

obtenemos la fórmula de muestreo

$$f(z) = 2 \sum_{n=1}^\infty f(z_n) \frac{z_n Q(z)}{(z^2 - z_n^2) Q'(z_n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n) Q'(z_n)}.$$

La convergencia de esta serie es absoluta y uniforme sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, donde

$$Q(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{z_n^2} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 3.3. ***(Muestreo relacionado con el espacio de Sobolev** $H^1(-\pi, \pi)$*)*

Como último ejemplo de esta sección (tomado de [61]) presentamos una fórmula de muestreo en un espacio $\mathcal{H}_K$, construido tomando como espacio de Hilbert de partida el espacio de Sobolev $\mathcal{H} = H^1(-\pi, \pi)$ cuyo producto interior está dado por

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_{-\pi}^\pi f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-\pi}^\pi f'(x) \overline{g'(x)} dx, \quad f, g \in H^1(-\pi, \pi).$$

Puesto que el complemento ortogonal de $\left\{ \mathrm{e}^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en $H^1(-\pi, \pi)$ es unidimensional y $\{\operatorname{senh} x\}$ es una base para él, la sucesión $\left\{ \mathrm{e}^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \cup \{\operatorname{senh} x\}$ es una base ortogonal para $H^1(-\pi, \pi)$. Para un valor fijo $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, definimos el núcleo

$$\begin{array}{cccc} K_a & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & H^1(-\pi, \pi) \\ & & z & \longmapsto & K_a(z) \end{array}$$

mediante

$$[K_a(z)](x) = (z - a) \mathrm{e}^{izx} + \operatorname{sen} \pi z \operatorname{senh} x, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Claramente, K_a es un núcleo analítico de Kramer para las sucesiones $\{z_n = n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{a_n = n-a\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y la mencionada base ortogonal.

Desarrollando $K_a(z) \in H^1(-\pi,\pi)$ respecto de dicha base obtenemos

$$K_a(z) = [1 - i(z-a)]\operatorname{sen}\pi z \operatorname{senh} x + (z-a)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+zn}{1+n^2}\operatorname{senc}(z-n)\mathrm{e}^{inx}$$

El correspondiente RKHS $\mathcal{H}_{K_a}$ es:

$$\mathcal{H}_{K_a} := \left\{ f\,:\,\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}:\ f(z) = \left\langle K_a(z), \overline{F}\right\rangle_1,\ F\in H^1(-\pi,\pi)\right\},$$

con lo cual, toda función entera en $\mathcal{H}_{K_a}$

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)[K_a(z)](x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^{'}(x)[K_a(z)]'(x)dx, \quad z\in\mathbb{C}$$

de acuerdo al teorema 3.1 puede ser recuperada a partir de sus muestras $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f(a)\}$ por medio de la fórmula de muestreo

$$f(z) = [1-i(z-a)]\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\operatorname{sen}\pi a}f(a) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{z-a}{n-a}\frac{1+zn}{1+n^2}\operatorname{senc}(z-n), \quad z\in\mathbb{C}. \tag{3.22}$$

3.3. El problema de momentos y la teoría de muestreo

En esta sección nos proponemos presentar algunos elementos de muestreo relacionados con el clásico problema de momentos. En particular, estamos interesados en el problema indeterminado de momentos de Hamburger y su relación con polinomios ortogonales de primera y segunda especie. Esos polinomios serán candidatos idóneos para ser considerados como núcleos analíticos de Kramer discretos y en consecuencia serán usados en una versión discreta de un teorema de Kramer abstracto. A continuación hacemos una breve descripción del mismo. Ver especialmente, las referencias clásicas [1] y [103]; también [14], [15], [16], [17], [29], [57], [80], entre otras.

Sean $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalo y $\{c_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales. El problema de momentos sobre el intervalo I consiste en determinar si existe una medida positiva μ sobre I tal que

$$c_n = \int_I x^n d\mu(x), \quad n\geq 0.$$

En el caso que exista μ, se pide establecer si dicha medida está determinada en forma única por $\{c_n\}_{n\geq 0}$, denominada sucesión de momentos de μ. Si no ocurre así, se pide describir todas las medidas positivas sobre el intervalo I con momentos $\{c_n\}_{n\geq 0}$. Si $I=\mathbb{R}$, el problema de momentos se llama de Hamburger y si $I=[0,\infty)$ el problema de momentos se llama de Stieltjes. Cuando μ es una medida positiva con momentos $\{c_n\}_{n\geq 0}$ se dice que μ es solución del problema de momentos. Si esta solución es única, se dice que el problema de momentos es *determinado*; en caso contrario se dice *indeterminado*.

Consideremos un problema de momentos indeterminado de Hamburger. Sean $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de momentos y V_c el conjunto de soluciones del problema; esto es, el conjunto de medidas de Borel positivas μ sobre $\mathbb{R}$ tales que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu(x) = c_n \qquad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Dada una medida $\mu \in V_c$ con momentos $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, el funcional de momentos $\mathcal{L}$ definido sobre el espacio vectorial $\mathbb{C}[x]$ de polinomios $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ dado por

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) d\mu(x),$$

es independiente de μ. Los polinomios ortonormales $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ asociados a los momentos $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ se caracterizan por ser P_n un polinomio de grado n con coeficiente principal $\alpha_n > 0$, tales que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) P_m(x) d\mu(x) = \delta_{n,m}, \quad \mu \in V_c.$$

Dichos polinomios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ únicamente dependen de la sucesión de momentos. Además, es conocido, que verifican una relación de recurrencia a tres términos de la forma [38],

$$x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x) \qquad n \geq 0 \tag{3.23}$$

donde $b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$, con condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$.

Parametrización del conjunto V_c

Nevanlinna (véase [1, p. 98]), hizo un estudio del conjunto V_c de soluciones de un problema de momentos indeterminado de Hamburger, utilizando algunos elementos de análisis complejo. A continuación haremos una rápida descripción del procedimiento utilizado; pero antes recordemos que la transformada de Stieltjes (o Cauchy) para una medida $\sigma \in V_c$ se define mediante la integral

$$F(z;\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

$F(z;\sigma)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tal que $F(\overline{z},\sigma) = \overline{F(z,\sigma)}$ y además, $Im(F(z,\sigma)) > 0$ cuando $Im(z) > 0$.

Una función φ se denomina función de Pick (también llamada de Herglotz o Nevanlinna), si es holomorfa en el semiplano $\mathbb{C}^+ = \{z : \ Im(z) > 0\}$ y además, $Im\ \varphi(z) \geq 0$ para $Im(z) > 0$. Por reflexión respecto a la recta real, estas funciones se pueden extender como funciones holomorfas a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Mediante la fórmula,

$$\varphi(z) = az + b + \int \frac{tz+1}{t-z} d\sigma(t), \tag{3.25}$$

donde $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$ y σ es una medida positiva sobre $\mathbb{R}$, se obtiene una extensión holomorfa de φ a $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\sigma)$ y en particular a todo el semiplano inferior. Usando (3.25) se deduce fácilmente que $\varphi(\overline{z}) = \overline{\varphi(z)}$.

Nevanlinna utilizó la clase de funciones complejas de Pick para dar una parametrización del conjunto V_c de soluciones del problema de momentos indeterminado de Hamburger. Concretamente, denotando por $\mathcal{P}$ al espacio de funciones de Pick, V_c se puede parametrizar por $\mathcal{P}$ junto con el punto ∞. Puesto que $\mathcal{P}$ hereda la topología de las funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se puede pensar en $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ como la compactificación con un punto, de $\mathcal{P}$. La parametrización se hace mediante el homeomorfismo $\varphi \mapsto \mu_\varphi$ entre $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ y V_c definido mediante la igualdad

$$F(z; \mu_\varphi) = -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \tag{3.26}$$

donde A, B, C, D son ciertas funciones enteras trascendentes de tipo exponencial minimal, las cuales conforman la matriz

$$\begin{bmatrix} A(z) & C(z) \\ B(z) & D(z) \end{bmatrix}$$

llamada matriz de Nevanlina asociada al problema de momentos. Tales funciones se obtienen en términos de los polinomios ortonormales $\{P_n\}$ con respecto a μ y de los polinomios asociados de segunda clase $\{Q_n\}$, dados por

$$Q_n(z) = \int \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} d\mu(x).$$

En [14] y [103] por ejemplo, se encuentran fórmulas explícitas para la matriz de Nevanlina cuyo determinante es 1, para todo $z \in \mathbb{C}$. La igualdad (3.26) significa que existe una correspondencia uno a uno entre las funciones de Pick y las soluciones μ del problema de momentos; es decir, la transformada de Stieltjes de toda solución $\mu \in V_c$ está dada por (3.26) para una única $\varphi \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$.

Por otra parte, los polinomios ortogonales de primera clase $\{P_n\}$ y de segunda clase $\{Q_n\}$ desempeñan un rol fundamental para el problema de momentos por la siguiente razón: una condición suficiente y necesaria para que el problema de momentos sea indeterminado es que exista $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, tal que $\{P_n(z)\}$ o $\{Q_n(z)\}$ pertenezcan a $\ell^2(\mathbb{N})$ (véase [1]). Además, si el problema de momentos es indeterminado, las series

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} |P_n(z)|^2 \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |Q_n(z)|^2$$

convergen uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$, (véase [1]).

Medidas N-extremales

Conociendo las funciones A, B, C, D, es posible encontrar mediante la fórmula de inversión de Stieltjes-Perron una solución $\mu_\varphi \in V_c$ para el problema indeterminado de momentos de Hamburger, correspondiente a una determinada función de Pick. En particular, tienen gran importancia las soluciones obtenidas cuando se consideran funciones de Pick constantes en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$; dichas soluciones reciben el nombre de medidas extremales de Nevanlinna (soluciones N-extremales) o medidas de Von Neumann. Concretamente, si $\varphi(z) = t$, $Im(z) \neq 0$, donde $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces de (3.26) se deduce que la transformada de Stieltjes de una medida N-extremal μ_t es la función meromorfa

$$\begin{cases} -\dfrac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)} & \text{si } \; t \in \mathbb{R}, \\[2ex] -\dfrac{A(z)}{B(z)} & \text{si } \; t = \infty, \end{cases} \tag{3.27}$$

lo cual implica que $\mu_{\varphi=t}$ es la medida discreta

$$\mu_t = \sum_{z \in \Lambda_t} m_z \delta_z \,,$$

donde como es usual, δ_x denota la medida de Dirac, es decir la masa unitaria en el punto x y Λ_t es el conjunto de ceros de los denominadores en (3.27) dependiendo de los posibles valores del parámetro t:

$$\Lambda_t = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \; : \; B(z)t - D(z) = 0\} & \text{si } \; t \in \mathbb{R}. \\[1ex] \{z \in \mathbb{C} \; : \; B(z) = 0\} & \text{si } \; t = \infty. \end{cases}$$

La medida μ_t está concentrada en Λ_t y la masa en $z \in \Lambda_t$ está dada por, [1],

$$m_z = \frac{A(z)t - C(z)}{B'(z)t - D'(z)}, \qquad z \in \Lambda_t.$$

La importancia de las medidas N-extremales consiste en que estas son las únicas soluciones $\mu \in V_c$ para las cuales los polinomios $\mathbb{C}[x]$ son densos en $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ – esta caracterización la hizo M. Riesz, (véase [1, p. 43]) – o equivalentemente, son las únicas medidas para las cuales los polinomios $\{P_n\}$ forman una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Por otra parte, los ceros de las funciones enteras $B(z)t - D(z)$, $t \in \mathbb{R}$, (o $B(z)$ cuando $t = \infty$) son reales y simples; además dicho conjunto $\Lambda_t \subset \mathbb{R}$ es discreto [103]. En consecuencia, en adelante usaremos la notación $\{z_m^t\}_{m=0}^{\infty}$, donde $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, para referirnos a dicho conjunto de ceros. Ahora, haremos uso del siguiente resultado:

Lema 3.1. *La sucesión*

$$\left\{P_0(z_m^t), P_1(z_m^t), P_2(z_m^t), P_3(z_m^t), \cdots, \right\}_{m\in\mathbb{N}_0}, \tag{3.28}$$

es una base ortogonal para $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

El anterior lema se prueba en [59] como consecuencia del siguiente hecho: se considera la ecuación en diferencias de segundo orden:

$$\nabla[p(n) \triangle y(n)] + q(n)y(n) = \lambda y(n)\,,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.29}$$

con la condición de frontera $y(-1) = 0$. Además se supone que $p(-1) > 0$ y $p(m) > 0$ si $m \in \mathbb{N}_0$. Añadiendo una condición de frontera en ∞, se estudia un problema de Sturm-Liouville regular en 0 y singular en ∞ usando resultados de la teoría de Weyl-Titchmarsh del *punto límite* y del *círculo límite*, (véase [6, pp. 125-129]).

En concreto nos interesa básicamente mencionar que si tomamos un par de soluciones linealmente independientes de (3.29), $\theta_1(\cdot,\lambda)$ y $\theta_2(\cdot,\lambda)$ tales que

$$\theta_1(-1,\lambda) = -\frac{1}{p(-1)}, \quad \theta_1(0,\lambda) = 0,$$

y

$$\theta_2(-1,\lambda) = 0, \quad \theta_2(0,\lambda) = 1,$$

existe una función $m_\infty(\lambda)$ analítica en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (véase [6, p. 125]), tal que para todo $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, la sucesión

$$\psi_\infty(n,\lambda) = \theta_1(n,\lambda) + m_\infty\theta_2(n,\lambda), \tag{3.30}$$

es solución de (3.29) perteneciente a $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ para la cual existe una condición de frontera en ∞ [77, p. 39]. En consecuencia, la ecuación (3.29) junto a $y(-1) = 0$ y (3.30), conforman un problema singular de Sturm-Liouville. La función $m_\infty(\lambda)$ (es única en el caso *punto límite* y existen infinitas en el caso *círculo límite*) puede ser extendida a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, de tal manera que sea real sobre la recta real y sus singularidades $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ (polos simples en $\mathbb{R}$), conforman la sucesión de valores propios del problema de Sturm-Liouville. Además, $\text{lím}_{n\to\infty}|\mu_n| = +\infty$. Presentamos el siguiente resultado probado en [59, lema 4, p. 703]:

Teorema 3.2. $\{\theta_2(\cdot,\mu_k)\}$ *es una base ortogonal del espacio de Hilbert* $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Consideremos como caso particular de (3.29) la relación de recurrencia a tres términos (3.23) para la cual los polinomios ortogonales $\{P_n\}$ respecto a una medida μ son solución, junto con las condiciones $P_0(x) = 1$ y $P_{-1}(x) = 0$.
Existe una conexión entre el problema indeterminado de momentos de Hamburger y la teoría de punto-límite/círculo-límite de Weyl-Titchmarsh, [58]; dicha relación es la siguiente: una condición necesaria y suficiente para que el problema de momentos de

Hamburger sea indeterminado es que la ecuación en diferencias (3.23) pertenezca al caso del círculo-límite. En este contexto, estamos en el caso círculo límite si y solamente si existe $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que la transformada de Stieltjes (3.24) de la medida N-extremal μ_t es precisamente función de Weyl-Titchmarsh, $m_\infty^t(z)$ ([58], p. 228); es decir, se tiene la igualdad

$$F(z;\mu_t) = -\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)} = m_\infty^t(z), \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Por lo tanto, para concluir la justificación mediante la cual (3.28) es una base ortogonal para $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, basta aplicar el teorema 3.2 de la siguiente manera: definimos $\{P_n(z)\} := \{\theta_2(n,z)\}$ y tomamos $\{\mu_m = z_m^t\}_{n=0}^\infty$ como la sucesión de polos simples de $m_\infty^t(z)$ es decir, los ceros de $B(z)t - D(z)$.

Con base en la descripción anterior acerca del problema indeterminado de momentos de Hamburger, a continuación utilizaremos los polinomios ortogonales de primera especie $\{P_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y de segunda especie $\{Q_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ respecto a una medida μ asociados a dicho problema de Hamburger, como núcleos discretos para proporcionar ejemplos discretos del teorema 3.1. Concretamente, usando la notación introducida en el ejemplo 2.3, p. 32 consideraremos los núcleos discretos $[K(z)](n) := P_n(z)$ y $[K(z)](n) := Q_n(z)$ como núcleos analíticos de Kramer para obtener desarrollos en serie para recuperar funciones pertenecientes a sus correspondientes espacios $\mathcal{H}_K$ a partir de una sucesión de sus muestras. En [57] se da una prueba de una versión discreta del teorema de Kramer (véase [58] también); dicho teorema dice lo siguiente:

Consideremos un núcleo discreto definido como

$$\begin{array}{rcccl} K & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{I}) \\ & & z & \longmapsto & \{K(n,z)\}_{n\in\mathbb{I}} \end{array}$$

donde $\mathbb{I}$ es un conjunto de índices numerable. Supongamos además que existe una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ de modo que $\{K(\cdot, z_n)\}$ es una base ortogonal de $\ell^2(\mathbb{I})$. Entonces (véase [57, p. 16]), toda función de la forma

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{I}} c_n K(n,z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.32}$$

donde $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{I})$, puede ser desarrollada mediante la serie muestral

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(z_n) S_n(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.33}$$

Las funciones muestrales se obtienen mediante la expresión

$$S_n(z) = \frac{1}{\|\{K(\cdot, z_n)\}\|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{K(m,z_n)} K(m,z).$$

La convergencia de la serie (3.33) es absoluta y uniforme en subconjuntos de $\mathbb{C}$ en los cuales $\|K(\cdot, z)\|$ es acotado.

Ejemplo 3.4. ***(Muestreo relacionado con los polinomios ortogonales asociados a un problema indeterminado de momentos de Hamburger)***

Consideremos la sucesión de polinomios de primera especie $\{P_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, ortogonales respecto a una medida μ, asociados al problema indeterminado de momentos de Hamburger. Al igual que en el ejemplo 2.3, consideremos $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}_0)$ y la aplicación $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ definida por $[K(z)]\,(n) := P_n(z),\ \ n \in \mathbb{N}_0$. Por el lema 3.1, existe una sucesión de puntos $\{z_m^t\}_{m=0}^{\infty}$ tal que $\{[K(z_m^t)]\,(n) = P_n(z_m^t)\}$ es una base ortogonal para $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, con lo cual K es un núcleo analítico de Kramer. Además, puesto que el problema de Hamburger es indeterminado, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |P_n(z)|^2$ converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$. Entonces, en el RKHS correspondiente,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_K &= \Big\{f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ \mid\ f(z) = \big\langle P_n(z), c_n\big\rangle,\ \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)\Big\} \\ &= \left\{f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ \mid\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),\ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)\right\}.\end{aligned}$$

se verifica como caso particular de (3.33), la siguiente fórmula de muestreo [57, teorema 1]:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(z_m^t) \frac{1}{\|\{P_n(z_m^t)\}\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_m^t) P_n(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3.34}$$

Análogamente, vamos a obtener un RKHS $\mathcal{H}_K$ a partir de un núcleo analítico de Kramer discreto definido mediante una sucesión de polinomios ortogonales de segunda especie (véase [57] por ejemplo). También en dicho espacio es posible obtener una fórmula de muestreo. Además, como veremos en la sección 4.2, la fórmula de muestreo obtenida puede escribirse como una fórmula interpolatoria tipo Lagrange.

En concreto, definimos el núcleo $[K(z)](n) := Q_n(z),\ \ n \in \mathbb{N}$, donde $\{Q_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales de segunda clase asociados a $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Dichos polinomios están dados en términos de la medida N-extremal μ_t por medio de la ecuación

$$Q_n(z) = \int \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} d\mu_t(x).$$

Los polinomios Q_n están relacionados con la sucesión de polinomios ortogonales de primera clase $\{\tilde{P}_n\}$ que verifica la relación de recurrencia a tres términos [38],

$$x\tilde{P}_n(x) = a_{n+1}\tilde{P}_{n+1}(x) + b_{n+1}\tilde{P}_n(x) + a_n\tilde{P}_{n-1}(x)\,,\ \ n \geq 0, \tag{3.35}$$

con el par de condiciones iniciales $\tilde{P}_{-1}(x) = 0$ y $\tilde{P}_0(x) = 1$, mediante la igualdad $\tilde{P}_n(z) = a_0 Q_{n+1}(z)$. Nótese que (3.35) es la misma ecuación (3.23), pero con coeficientes desplazados, debido a que la sucesión $\{\tilde{P}_n\}$ está relacionada con el denominado "Problema de momentos desplazado"

Si el problema de momentos original es indeterminado, lo mismo ocurre con el problema desplazado correspondiente a (3.35); además la matriz de Nevanlinna relacionada con este problema puede ser expresada en términos de la matriz de Nevanlinna del problema original. En particular se cumplen las siguientes relaciones [95]:

$$\tilde{B}(z) = -C(z) - b_0 A(z) \ \text{ y } \ \tilde{D}(z) = a_0^2 A(z).$$

También en este caso, los ceros de las funciones enteras $\tilde{B}(z)t - \tilde{D}(z)$, $t \in \mathbb{R}$, (o $\tilde{B}(z)$ cuando $t = \infty$) son reales y simples. Dicho dicho conjunto de ceros $\tilde{\Lambda}_t \subset \mathbb{R}$ es discreto [103]. En adelante adoptaremos la notación $\{\omega_m^t\}_{m=0}^{\infty}$, donde $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, para referirnos a $\tilde{\Lambda}_t$.

Igualmente, de acuerdo al lema 3.1, la sucesión $\{[K(\omega_m^t)](n) = Q_n(\omega_m^t)\}$ es una base ortogonal para $\ell^2(\mathbb{N})$, con lo cual K también es un núcleo analítico de Kramer. Además, debido a que el problema de momentos es indeterminado, se cumple que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} |Q_n(z)|^2$ converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ [1]. En consecuencia, el espacio $\mathcal{H}_K$ correspondiente es

$$\mathcal{H}_K := \left\{ f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \mid f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(z), \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}.$$

La fórmula de muestreo en $\mathcal{H}_K$ viene dada por

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(\omega_m^t) \frac{1}{\|\{Q_n(\omega_m^t)\}\|^2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\omega_m^t) Q_n(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3.36}$$

En la página 80 (corolario 4.1), como consecuencia del teorema 4.3, se presenta la fórmula (3.36) escrita como una serie interpolatoria tipo-Lagrange.

3.4. Un resultado inverso

En esta sección estudiamos el problema recíproco al enunciado en el teorema 3.1. En dicho teorema obtuvimos una fórmula de muestreo no ortogonal (3.5) para funciones en $\mathcal{H}_K$ siempre y cuando el núcleo K del operador antilineal $\mathcal{T}_K$ es un núcleo analítico de Kramer como el definido en (3.1). Naturalmente, es posible formular la pregunta contraria; es decir, cuándo a partir del operador antilineal dado en (2.1), con núcleo K y espacio imagen $\mathcal{H}_K$ con núcleo reproductor (2.9), una fórmula de muestreo como (3.5) convergente puntualmente en $\mathcal{H}_K$ implica la condición de núcleo analítico de Kramer para K.

Obsérvese que de la mencionada fórmula (3.5) podemos deducir los siguientes hechos:

- La sucesión $\{f(z_n)/a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, para todo $f \in \mathcal{H}_K$.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n S_n(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ entonces $\alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto también es consecuencia de la unicidad del desarrollo respecto a una base de Riesz de cualquier elemento en el RKHS $\mathcal{H}_K$.

Adicionalmente, de acuerdo a (2.22) es inmediata la siguiente condición:

- Para todo $z \in \mathbb{C}$, la sucesión $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Las condiciones anteriores son suficientes para garantizar que el núcleo K es un núcleo analítico de Kramer como se prueba en el siguiente resultado en el cual se siguen algunas ideas usadas originalmente en [62].

Teorema 3.3. *Sean $\mathcal{T}_K$ el operador antilineal definido en (2.1) y $\mathcal{H}_K$ su correspondiente rango, el cual es un espacio de Hilbert de funciones enteras con núcleo reproductor $\kappa(z,\omega) = \langle K(z), K(\omega)\rangle_{\mathcal{H}}$. Además, supongamos que existe una sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_K$ tal que para cada $z \in \mathbb{C}$ la sucesión $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y que se satisfacen las siguientes propiedades :*

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n S_n(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ entonces $\alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Existen sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que para todo $f \in \mathcal{H}_K$, $\left\{\dfrac{f(z_n)}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y además se verifica la fórmula de muestreo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{a_n} S_n(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

la cual converge puntualmente en $\mathbb{C}$ para todo $f \in \mathcal{H}_K$.

Entonces, la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}_K$ y para cada $z \in \mathbb{C}$ el núcleo $K(z)$ del operador $\mathcal{T}_K$ puede desarrollarse en la forma:

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) x_n \quad \text{en } \mathcal{H},$$

donde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la base de Riesz dual de $\left\{x_n^* = \mathcal{T}_K^{-1}(S_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$. En particular, $K(z_n) = a_n x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por comodidad, efectuaremos la prueba en una secuencia de pasos:

1. Puesto que por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} |S_n(z)|^2 < \infty$, para cada $z \in \mathbb{C}$, de acuerdo al comentario previo a la propiedad 5 de la página 21, la función $\widetilde{\kappa}$ definida por

$$\widetilde{\kappa}(z,\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} S_n(z)\overline{S_n(\omega)}, \quad z,\omega \in \mathbb{C},$$

es definida positiva. Por lo tanto, usando la propiedad 3 (teorema de Aronszajn) de la misma página, existe un espacio de funciones $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}} \subseteq \mathcal{H}_K$ con estructura de RKHS cuyo núcleo reproductor es $\widetilde{\kappa}$, (véanse detalles en [5] o [108, p. 3]). Por otro lado, la condición a) de acuerdo a la propiedad 5 página 21, es equivalente a que $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal en $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$ [108], [45].

En los dos próximos pasos probaremos la igualdad de este par de espacios y la equivalencia de sus normas; esto es, para ciertas constantes $0 < a \leq b$, se verifica

$$a\|f\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}_K} \leq b\|f\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}}, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

2. Veamos la inclusión contraria $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}} \supset \mathcal{H}_K$. Dada $f \in \mathcal{H}_K$, por la condición b) de la hipótesis, la sucesión $\{c_n = f(z_n)/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{N})$ y puesto que $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base ortonormal en $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(f(z_n)/a_n)S_n(z)$ converge en la norma de $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$ y por lo tanto, de acuerdo a la propiedad 4 de la página 22, esto implica la convergencia puntual en $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$. En consecuencia, usando la fórmula de muestreo de la condición b) y teniendo en cuenta la unicidad del desarrollo concluimos necesariamente que $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{a_n} S_n$, con la convergencia en la norma de $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$, con lo cual, $f \in \mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$.

3. Consideremos la aplicación identidad $i_d : \mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}} \longrightarrow \mathcal{H}_K$ y una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que si $n \to \infty$, $f_n \longrightarrow f$ en $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$ y $f_n \longrightarrow g$ en $\mathcal{H}_K$. Aplicando la propiedad reproductora en el espacio $\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
|f_n(\omega) - f(\omega)| &= |\langle f_n(\cdot), \widetilde{\kappa}(\cdot,\omega)\rangle - \langle f(\cdot), \widetilde{\kappa}(\cdot,\omega)\rangle| \\
&= |\langle f_n(\cdot) - f(\cdot), \widetilde{\kappa}(\cdot,\omega)\rangle| \\
&\leq \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}} \|\widetilde{\kappa}(\cdot,\omega)\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}} \\
&= \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}} \sqrt{\langle \widetilde{\kappa}, \widetilde{\kappa}\rangle} \\
&= \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}} \sqrt{\widetilde{\kappa}(\omega,\omega)}
\end{aligned}$$

para $\omega \in \mathbb{C}$. Utilizando el mismo razonamiento en $\mathcal{H}_K$ llegamos a

$$|f_n(\omega) - g(\omega)| \leq \|f_n - g\|_{\mathcal{H}_K} \sqrt{\kappa(\omega,\omega)}.$$

Entonces, $\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) = g(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$, con lo cual $f = g$ y por lo tanto la aplicación identidad es un operador cerrado y de acuerdo al teorema del grafo cerrado es continua, es decir, existe $b > 0$ tal que $\|i_d f\|_{\mathcal{H}_K} \leq b\|f\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{\kappa}}}$.

Además, es claro que esta aplicación es sobreyectiva, con lo cual, como resultado del teorema de la aplicación abierta existe $a > 0$ tal que $a\|f\|_{\mathcal{H}_{\widetilde{K}}} \le \|i_d f\|_{\mathcal{H}_K}$; es decir, las normas de $\mathcal{H}_{\widetilde{K}}$ y $\mathcal{H}_K$ son equivalentes.

En consecuencia, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}_K$.

4. Supongamos que el operador $\mathcal{T}_K$ definido en (2.1) es inyectivo. En este caso, la sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} = \{\mathcal{T}_K^{-1}(S_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$ cuya base dual la denotaremos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. En consecuencia, para cada $z \in \mathbb{C}$, desarrollando $K(z)$ respecto a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ encontramos

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K(z), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}\, x_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) x_n \quad \text{en } \mathcal{H},$$

el cual es el desarrollo requerido.

Para probar la propiedad interpolatoria $S_m(z_n) = a_n \delta_{n,m}$ aplicamos la fórmula de muestreo de la condición b) a S_m, para obtener

$$0 = \sum_{n \neq m} \frac{S_m(z_n)}{a_n} S_n(z) + \left(\frac{S_m(z_m)}{a_m} - 1 \right) S_m(z)$$

y aplicando la condición a) a esta última expresión, se obtiene dicha propiedad. En particular,

$$K(z_n) = S_n(z_n) x_n = a_n x_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

5. Finalmente, en el caso en que el operador $\mathcal{T}_K$ no sea inyectivo, consideremos la proyección ortogonal

$$Q: \quad \mathcal{H} \longrightarrow (\mathcal{N}(\mathcal{T}_K))^{\perp}$$

en donde de acuerdo a la notación introducida en el capítulo 2, $\mathcal{N}(\mathcal{T}_K)$ es el espacio nulo de $\mathcal{T}_K$. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{H}$ tal que $Qy_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{H}_K$ tal que $\mathcal{T}_K(y_n) = S_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ la función S_n verifica las condiciones dadas en las hipótesis, entonces, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}_K$. Las siguientes igualdades son inmediatas: $Q(\mathcal{H}) = (\mathcal{N}(\mathcal{T}_K))^{\perp}$, $S_n = \mathcal{T}(Qy_n)$ y $\mathcal{T}_K|_{Q(\mathcal{N}(\mathcal{T}_K))} = 0$.

Por lo tanto, concluimos que $\{Qy_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz en $Q(\mathcal{H})$ y el resultado se obtiene teniendo en cuenta que $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\mathcal{T}_K) \oplus (\mathcal{N}(\mathcal{T}_K))^{\perp}$.

□

3.5. Muestreo en $\mathcal{H}_K$ utilizando otras muestras

En este apartado presentamos un teorema de muestreo que hace uso de un núcleo analítico adicional y de muestras de otras funciones que guardan cierta relación con la función $f(z)$ que se desea recuperar.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable con un par de bases de Riesz duales, escritas como

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \cup \{y_n^*\}_{n=1}^{\infty} .$$

Sean $\mathcal{T}_K$ un operador antilineal definido como en (2.1) y $\mathcal{H}_K = \mathcal{T}_K(\mathcal{H})$ el RKHS de funciones enteras correspondiente al núcleo analítico $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$. Para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo, supongamos que es posible obtener el siguiente desarrollo para $K(z)$:

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) x_n + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z) y_n ,$$

en donde las sucesiones de funciones complejas $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{T_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ verifican la propiedad interpolatoria

$$S_n(z_m) = a_n \delta_{n,m} , \quad T_n(z_m) = b_n \delta_{n,m} \tag{3.37}$$

para ciertas sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$.

Por otra parte, supongamos adicionalmente que en $\mathcal{H}$ existe otro núcleo $\breve{K} : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ y un operador $\breve{\mathcal{T}}_K$ definido entre $\mathcal{H}$ y el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \breve{\mathcal{T}}_K : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ & x & \longmapsto & \breve{f}_x \end{array}$$

de modo que

$$\breve{f}_x(z) = \left\langle \breve{K}(z), x \right\rangle_{\mathbb{H}} , \; z \in \mathbb{C}. \tag{3.38}$$

y análogamente, supongamos que para cada elemento $z \in \mathbb{C}$ fijo, es posible desarrollar $\breve{K}$ por medio de la serie

$$\breve{K}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \breve{S}_n(z) x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \breve{T}_n(z) y_n ,$$

en donde las sucesiones de funciones $\left\{\breve{S}_n(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\breve{T}_n(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $z \in \mathbb{C}$, satisfacen para la sucesión compleja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ la propiedad interpolatoria

$$\breve{S}_n(z_m) = c_n \delta_{n,m} , \; \breve{T}_n(z_m) = d_n \delta_{n,m} \tag{3.39}$$

con $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$.

Suponiendo que las condiciones interpolatorias (3.37) y (3.39) verifican

$$\Delta_n := a_n d_n - b_n c_n \neq 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{3.40}$$

y además, que las transformaciones lineales $\mathcal{T}_K$ y $\breve{\mathcal{T}}_K$ están relacionadas mediante la inclusión $\ker \breve{\mathcal{T}}_K \supseteq \ker \mathcal{T}_K$ de sus núcleos –de tal manera que para cada $f \in \mathcal{H}_K$ existe una única función $\breve{f}$ asociada–, entonces, bajo tales condiciones existe una fórmula de muestreo que permite recuperar a f a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\breve{f}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ como se enuncia en el siguiente teorema [55]:

Teorema 3.4. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathcal{T}_K$, $\breve{\mathcal{T}}_K$ operadores lineales definidos sobre $\mathcal{H}$ como en (2.1) y (3.38). Supongamos además que se verifica la inclusión de sus espacios nulos $\ker \breve{\mathcal{T}}_K \supseteq \ker \mathcal{T}_K$ y las condiciones (3.37), (3.39) y (3.40). Entonces, $\mathcal{T}_K$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_K$ y en consecuencia, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}_K$. Además, toda función $f_x = \mathcal{T}_K(x)$ en $\mathcal{H}_K$, $x \in \mathcal{H}$, puede ser recuperada a partir de sus muestras $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y de las muestras $\{\breve{f}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de su función relacionada $\breve{f}_x = \breve{\mathcal{T}}_K(x)$ mediante la fórmula de muestreo*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f(z_n) \frac{d_n S_n(z) - c_n T_n(z)}{\Delta_n} + \breve{f}(z_n) \frac{a_n T_n(z) - b_n S_n(z)}{\Delta_n} \right], \quad z \in \mathbb{C} \tag{3.41}$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Para probar que $\mathcal{T}_K$ es un isomorfismo isométrico, es suficiente probar que este operador es uno a uno. En efecto, supongamos que $f_x = f_y$, esto equivale a $f_x - f_y = 0 = f_{x-y}$, por lo tanto, $x - y \in \ker \mathcal{T}_K$, y como $\ker \breve{\mathcal{T}}_K \supseteq \ker \mathcal{T}_K$ entonces $\breve{f}_{x-y} = 0$. Puesto que $f_x(z) = \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}}$, en particular si $z = z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= f_{x-y}(z_n) = \big\langle K(z_n), x - y\big\rangle_{\mathcal{H}} = a_n \big\langle x_n, x - y\big\rangle_{\mathcal{H}} + b_n \big\langle y_n, x - y\big\rangle_{\mathcal{H}} \\ 0 &= \breve{f}_{x-y}(z_n) = \big\langle \breve{K}(z_n), x - y\big\rangle_{\mathcal{H}} = c_n \big\langle x_n, x - y\big\rangle_{\mathcal{H}} + d_n \big\langle y_n, x - y\big\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

aplicando la condición (3.40) llegamos a $\big\langle x_n, x - y\big\rangle_{\mathcal{H}} = 0 = \big\langle y_n, x - y\big\rangle_{\mathcal{H}}$ y por la completitud de la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ concluimos que $x = y$.

Por lo tanto, $\mathcal{T}_K$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_K$ y éste último espacio admite el siguiente par de bases de Riesz duales: $\{S_n = \mathcal{T}_K x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{T_n = \mathcal{T}_K y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S_n^* = \mathcal{T}_K x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \cup \{T_n^* = \mathcal{T}_K y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Del desarrollo de $f \in \mathcal{H}_K$ respecto de estas bases de Riesz

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \big[\big\langle f, S_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}_K} S_n + \big\langle f, T_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}_K} T_n \big], \quad \text{en } \mathcal{H}_K, \tag{3.42}$$

y del par de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
f(z_n) &= \big\langle K(z_n), x \big\rangle_{\mathcal{H}} = a_n \big\langle x_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}} + b_n \big\langle y_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}} \\
\breve{f}(z_n) &= \big\langle \breve{K}(z_n), x \big\rangle_{\mathcal{H}} = c_n \big\langle x_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}} + d_n \big\langle y_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}},
\end{aligned}
$$

como $\Delta_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$
\big\langle x_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{d_n f(z_n) - b_n \breve{f}(z_n)}{\Delta_n} \quad \text{y} \quad \big\langle y_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{a_n \breve{f}(z_n) - c_n f(z_n)}{\Delta_n}.
$$

Finalmente, puesto que el operador $\mathcal{T}_K$ es una isometría antilineal, observamos que $\big\langle x_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle f, S_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}_K}$ y $\big\langle y_n, x \big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle f, T_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}_K}$ con lo cual, al sustituir en (3.42) se llega a (3.41). La convergencia de la serie será igualmente absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, debido a que $\mathcal{H}_K$ es un RKHS y al carácter incondicional de las bases de Riesz. $\square$

Una fórmula de muestreo usando f' como función relacionada

Si f es cualquier función en $\mathcal{H}_K$, una manera natural de buscar una función relacionada con f consiste en elegir $\breve{f} = f'$. Para tal efecto, supongamos que para cada $z \in \mathbb{C}$, el núcleo analítico $K(z)$ puede ser desarrollado mediante la serie

$$
K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) x_n + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z) y_n \ ,
$$

y por lo tanto,

$$
K'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S'_n(z) x_n + \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(z) y_n \ ,
$$

tal que los coeficientes del desarrollo de $K'(z)$ con respecto a la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son

$$
S'_n(z) = \big\langle K'(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \ \text{y} \ T'_n(z) = \big\langle K'(z), y_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}}
$$

con $\mathcal{T}_K x_n = S_n$ y $\mathcal{T}_K y_n = T_n$. Si existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que se satisfagan las condiciones interpolatorias

$$
\begin{aligned}
S_n(z_m) &= a_n \delta_{n,m} \ , \ T_n(z_m) = b_n \delta_{n,m} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \\
S'{}_n(z_m) &= c_n \delta_{n,m} \ , \ T'{}_n(z_m) = d_n \delta_{n,m} \quad \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

junto con la condición $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos como consecuencia del teorema 3.4 el siguiente corolario:

Corolario 3.1. *Bajo las condiciones anteriormente enunciadas, toda función en el RKHS $\mathcal{H}_K$ puede ser recuperada a partir de sus muestras $\{f(z_n\}$ y de las muestras de su derivada $\{f'(z_n\}$ por medio de la fórmula muestral*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f(z_n) \frac{d_n S_n(z) - c_n T_n(z)}{\Delta_n} + f'(z_n) \frac{a_n T_n(z) - b_n S_n(z)}{\Delta_n} \right], \quad z \in \mathbb{C}.$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Una fórmula de muestreo con derivadas en el espacio PW_π

Como una aplicación del corolario 3.1 es posible deducir en el espacio de Paley-Wiener PW_π una fórmula de muestreo con derivadas de la función a recuperar. En efecto, consideremos el núcleo de Fourier:

$$\begin{array}{rccc} K & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[-\pi,\pi] \\ & & z & \longmapsto & K(z) \end{array}, \quad [K(z)](\omega) = \frac{\mathrm{e}^{iz\omega}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \omega \in [-\pi,\pi].$$

el cual es derivable en $\mathbb{C}$ y su derivada está dada por

$$\begin{array}{rccc} K' & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[-\pi,\pi] \\ & & z & \longmapsto & K'(z) \end{array}, \quad [K'(z)](\omega) = i\omega \frac{\mathrm{e}^{iz\omega}}{\sqrt{2\pi}}.$$

La sucesión

$$\left\{ x_n = \frac{\mathrm{e}^{-2in\omega}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \bigcup \left\{ y_n = i\omega \frac{\mathrm{e}^{-2in\omega}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

es una base de Riesz de $L^2[-\pi,\pi]$ (véase [71]), cuya base dual está dada por

$$\left\{ x_n^* = \frac{(1-\frac{|\omega|}{\pi})}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-2in\omega} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \bigcup \left\{ y_n^* = \frac{i\,\mathrm{sign}(\omega)}{\pi\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-2in\omega} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Desarrollando el núcleo de Fourier $[K(z)](\omega) = \mathrm{e}^{iz\omega}/\sqrt{2\pi}$ con respecto a la primera base y usando algunas transformadas de Fourier conocidas, obtenemos

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle K(z), x_n^* \rangle x_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle K(z), y_n^* \rangle y_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\langle \frac{\mathrm{e}^{iz\omega}}{\sqrt{2\pi}}, (1-\frac{|\omega|}{\pi}) \frac{\mathrm{e}^{-2in\omega}}{\sqrt{2\pi}} \Big\rangle x_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\langle \frac{\mathrm{e}^{iz\omega}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{i\,\mathrm{sign}(\omega)}{\pi\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-2in\omega} \Big\rangle y_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\mathrm{sen}(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)} \right)^2 x_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\mathrm{sen}^2(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)} y_n. \end{aligned}$$

En este caso, las funciones S_n y T_n están dadas por

$$S_n(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)}\right)^2 \quad ; \quad T_n(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)},$$

y sus respectivas derivadas son

$$\begin{aligned} S_n'(z) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2(z-2n)^3}\left(2\cos\pi(z-2n) + \pi(z-2n)\operatorname{sen}\pi(z-2n) - 2\right) , \\ T_n'(z) &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2(z-2n)^2}\left(\cos\pi(z-2n) + \pi(z-2n)\operatorname{sen}\pi(z-2n) - 1\right) . \end{aligned}$$

Además, si $\{z_m = 2m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ se verifican las condiciones interpolatorias

$$S_n(z_m) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\delta_{n,m}\,; \qquad T_n(z_m) = 0$$

$$S_n'(z_m) = 0\,; \qquad T_n'(z_m) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\delta_{n,m},$$

con lo cual obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.2. *Toda función en el espacio PW_π se puede desarrollar en términos de la serie muestral*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2n)\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)}\right)^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(2n)\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(f(2n) + (z-2n)f'(2n)\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)}\right)^2, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

La convergencia de esta serie es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Una fórmula de muestreo en PW_π usando la transformada de Hilbert

Otra aplicación posible del teorema 3.4 en el espacio de Paley-Wiener PW_π ocurre cuando dada una función $f \in PW_\pi$, consideramos como función relacionada a la transformada de Hilbert de f

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}(-i\ \operatorname{sign}(\omega))\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{iz\omega}d\omega, \quad z \in \mathbb{C}$$

y donde las muestras a considerar están dadas por las sucesiones

$$\{f(2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\,; \quad \{\widetilde{f}(2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Además del núcleo e Fourier $[K(z)](\omega) = \mathrm{e}^{iz\omega}/\sqrt{2\pi}$, se considera el núcleo correspondiente a la transformada de Hilbert en $L^2[-\pi,\pi]$

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{K} & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[-\pi,\pi] \\ & & z & \longmapsto & \widetilde{K}(z) \end{array}\ , \qquad [\widetilde{K}(z)](\omega) = \frac{-i\ \mathrm{sign}(\omega)}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{iz\omega}.$$

Por otra parte, fijando $z \in \mathbb{C}$, al desarrollar el núcleo de Fourier $K(z) = \mathrm{e}^{iz\omega}/\sqrt{2\pi}$ con respecto a la base ortonormal

$$\left\{x_n = \frac{\mathrm{e}^{-2in\omega}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \bigcup \left\{y_n = -\frac{i\ \mathrm{sign}(t)}{\pi\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-2int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

de $L^2[-\pi,\pi]$ (véase [71]), se obtiene

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle K(z), x_n\rangle x_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle K(z), y_n\rangle y_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi(z-2n)}{\pi(z-2n)} x_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)} y_n. \end{aligned}$$

Las funciones

$$S_n(z) = \frac{\operatorname{sen}\pi(z-2n)}{\pi(z-2n)} \quad \text{y} \quad T_n(z) = \frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)}$$

verifican para la sucesión $\{z_n = 2n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ las condiciones interpolatorias

$$S_n(2m) = \delta_{n,m}\,; \quad T_n(2m) = 0.$$

Además, efectuando un cálculo sencillo encontramos que

$$\breve{K}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(z) x_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(z) y_n$$

y por lo tanto, $\breve{S}_n(z_m) = T_n(2m) = 0$ y $\breve{T}_n(z_m) = -S_n(2m) = -\delta_{n,m}$. En consecuencia, de acuerdo al teorema 3.4 obtenemos,

Corolario 3.3. *Toda función en el espacio PW_π se puede desarrollar mediante la serie muestral*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2n)\frac{\operatorname{sen}\pi(z-2n)}{\pi(z-2n)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(2n)\frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(2n)\cos(\pi/2)(z-2n) - \widetilde{f}(2n)\operatorname{sen}(2/\pi)(z-2n)\right]\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)(z-2n)}{(\pi/2)(z-2n)}, \end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{C}$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

4

Fórmulas de muestreo interpolatorias tipo-Lagrange

Un problema interesante consiste en establecer condiciones bajo las cuales una fórmula de muestreo no ortogonal como la obtenida en el capítulo anterior

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(z_n)}{a_n}S_n(z),\quad z\in\mathbb{C},$$

pueda ser escrita como una serie interpolatoria tipo-Lagrange; esto es,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f(z_n)\frac{Q(z)}{(z-z_n)Q'(z_n)},\quad z\in\mathbb{C},$$

donde Q es una función entera con ceros simples en el conjunto de puntos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por ejemplo, observemos que en el espacio de Paley-Wiener PW_π esta propiedad se cumple. En efecto, si consideramos $f\in PW_\pi$, entonces de acuerdo al teorema de Whittaker-Shannon-Kotelnikov,

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)\frac{\operatorname{sen}\pi(z-n)}{\pi(z-n)},\quad z\in\mathbb{C}.$$

Para expresar esta serie cardinal en términos de una serie interpolatoria tipo-Lagrange basta tomar $Q(z)=\sin(\pi z)/\pi$ como función entera con ceros simples en $n\in\mathbb{Z}$. Es evidente que $Q'(n) = (-1)^n$ con lo cual,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi(z-n)(-1)^n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{Q(z)}{(z-n)Q'(n)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como veremos en este capítulo, la respuesta a este problema depende de una condición acerca de la estabilidad de las funciones pertenecientes al espacio $\mathcal{H}_K$ cuando se les quita una cantidad finita de sus ceros. Esta propiedad del espacio de tipo algebraico la denominaremos propiedad *Zero-removing*. En [52] se resolvió este problema cuando la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la definición 3.1 es una base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y en $\mathcal{H}_K$ se cumple esta propiedad. Aquí probaremos que dicho resultado es igualmente cierto en el contexto general en que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$.

Antes de entrar en detalles formales, veamos a través de un ejemplo sencillo – una fórmula de muestreo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_K$ cuyo núcleo K es polinomial – las ideas fundamentales que desarrollaremos posteriormente:

Consideremos un espacio unitario $\mathcal{H}_2$ de dimensión 2 y sea $\{u_1, u_2\}$ una base ortonormal en este espacio. Definimos el núcleo

$$\begin{aligned} K : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ z &\longmapsto K(z) \end{aligned}$$

dado por $K(z) = z^2(u_2 - u_1) + u_1$. Su correspondiente espacio $\mathcal{H}_K$ es :

$$\mathcal{H}_K = \big\{f : \ f(z) = \big\langle K(z), x \big\rangle, \quad x \in \mathcal{H}_2\big\} = \big\{az^2 + b, \quad a, b \in \mathbb{C}\big\}$$

En efecto, para cada $x \in \mathcal{H}_2$,

$$\begin{aligned} \big\langle K(z), x \big\rangle &= \big\langle z^2(u_2 - u_1) + u_1, x \big\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \big\langle z^2(u_2 - u_1), x \big\rangle_{\mathcal{H}_2} + \big\langle u_1, x \big\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= z^2\big(\langle u_2, x\rangle_{\mathcal{H}_2} - \langle u_1, x\rangle_{\mathcal{H}_2}\big) + \langle u_1, x\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= z^2(\alpha - \beta) + \beta \\ &= az^2 + b, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

donde $a = \alpha - \beta \in \mathbb{C}$ y $b = \beta \in \mathbb{C}$.

En $\mathcal{H}_K$ es posible encontrar una fórmula de muestreo asociada. En primer lugar observamos que $K(z_n) = a_n u_n$ con $a_1 = a_2 = 1$, $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. Por lo tanto, K es un núcleo analítico de Kramer. De acuerdo con el teorema 3.1 la correspondiente fórmula de muestreo es

$$f(z) = f(z_1)S_1(z) + f(z_2)S_2(z) \tag{4.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_1(z) &= \left\langle z^2(u_2-u_1)+u_1, u_1\right\rangle_{\mathcal{H}_2} \\
&= \left\langle z^2(u_2-u_1), u_1\right\rangle_{\mathcal{H}_2} + \langle u_1, u_1\rangle_{\mathcal{H}_2} \\
&= z^2\big(\langle u_2, u_1\rangle_{\mathcal{H}_2} - \langle u_1, u_1\rangle_{\mathcal{H}_2}\big) + \langle u_1, u_1\rangle_{\mathcal{H}_2} \\
&= -z^2+1,
\end{aligned}$$

y

$$S_2(z) = \left\langle z^2(u_2-u_1)+u_1, u_1\right\rangle_{\mathbb{H}_2} = z^2.$$

Sin embargo, no es posible escribir (4.1) como una suma interpolatoria tipo-Lagrange. Consideremos por ejemplo la función polinomial $P(z) = z^2 - z$ la cual tiene ceros en $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$; con lo cual,

$$\begin{aligned}
f(0)\frac{P(z)}{(z-z_1)P'(z_1)} + f(1)\frac{P(z)}{(z-z_2)P'(z_2)} &= f(0)(z-1) + f(1)z \\
&\neq f(0)S_1(z) + f(1)S_2(z).
\end{aligned}$$

Nótese que si a las funciones pertenecientes a $\mathcal{H}_K$ les quitamos uno de sus ceros, las funciones resultantes ya no pertenencen a este espacio.

Iniciamos este capítulo formalizando la definición de la propiedad *Zero-removing* para clases de funciones enteras; a continuación presentamos un par de ejemplos estándar de funciones enteras que verifican esta propiedad; posteriormente, se exhiben algunos ejemplos de espacios $\mathcal{H}_K$ construidos a partir de núcleos analíticos de Kramer en los cuales no se satisface esta condición. En el teorema 4.1 se generaliza el ejemplo anterior para un núcleo polinomial de grado N y finalmente, en el teorema 4.2 se establece como resultado central del capítulo la conexión existente entre la mencionada propiedad y la posibilidad de reescribir fórmulas como (3.5) en términos de series interpolatorias tipo- Lagrange.

4.1. La propiedad *Zero-removing* (propiedad *ZR*)

Definición 4.1. *(Propiedad Zero-removing)*

Se dice que una clase de funciones enteras X posee la denominada propiedad Zero-Removing (ZR en forma abreviada) si para toda función f en X y todo cero ω de f, la función $f(z)/(z-\omega)$ también pertenece a X.

Algunas familias de funciones que verifican la propiedad *ZR*

La propiedad *ZR* es una propiedad común en matemáticas. Por ejemplo, un espacio estándar en donde se verifica dicha propiedad es $\mathcal{P}_N[\mathbb{C}]$, el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a N con coeficientes complejos. Sin embargo, nuestro interés fundamental consiste en estudiarla dentro del contexto de los espacios $\mathcal{H}_K$ en relación con el muestreo. Desde ese punto de vista, al final de la sección 4.3, como ilustración del teorema 4.2 ofreceremos otros ejemplos dentro de los cuales sobresalen una nueva prueba del teorema de Paley-Wiener-Levinson asociado al muestreo irregular y otros que ilustran el teorema discreto de Kramer. En los capítulos siguientes estudiaremos espacios $\mathcal{H}_K$ en donde se satisface la propiedad *ZR*: por ejemplo, los espacios de De Branges que se estudiarán en el capítulo 5. En el capítulo 6, se estudiará la propiedad *ZR* en espacios de funciones enteras construidos a partir de ciertos núcleos denominados σ-resolventes.

Ejemplo 4.1. ***(La clase de Polya)***

Un primer ejemplo de clase de funciones enteras que verifican la propiedad *ZR* lo tenemos en la clase de Polya. Una función entera $F(z)$ se dice que pertenece a la clase de Polya si se cumple que

- F no tiene ceros en el semiplano superior.
- Para $y > 0$, $|F(x - iy)| \leq |F(x + iy)|$.
- Para cada x fijo, $|F(x + iy)|$ es una función no decreciente de $y > 0$.

Por ejemplo, la función $f(z) = \cos z$ pertenence a la clase de Polya. En la referencia [20, lema 1] se prueba que la clase de Polya verifica la propiedad *ZR*.

Ejemplo 4.2.

El espacio de Paley-Wiener

$$PW_\pi = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \Big\} \tag{4.2}$$

de funciones banda limitada al intervalo $[-\pi, \pi]$ satisface la propiedad *ZR*. Esto es consecuencia del clásico teorema de Paley-Wiener (véase[116, p. 85]) el cual garantiza que PW_π puede ser descrito de la siguiente manera

$$PW_\pi = \Big\{ f \text{ función entera} : \quad |f(z)| \leq C e^{\pi |z|}, \quad f\,|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R}) \Big\}$$

esto es, toda función de cuadrado integrable, banda limitada al intervalo $[-\pi, \pi]$ puede ser extendida a todo el plano complejo como una función entera F de tipo exponencial a lo más π. De esta caracterización, se sigue de inmediato que en el espacio PW_π se verifica la propiedad *ZR*.

Por otra parte, retomando los espacios $\mathcal{H}_K$ desarrollados en el capítulo 2, sería importante establecer condiciones bajo las cuales en dichos espacios de funciones enteras se verifique la propiedad *ZR*. En principio la solución a esta cuestión no es sencilla y aparecerá como un problema abierto. No obstante, se puede obtener un resultado cuando el espacio $\mathcal{H}_K$ proviene de un núcleo polinomial con coeficientes en $\mathcal{H}$.

En concreto, es posible generalizar el núcleo K definido sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_2$ considerado en el ejemplo dado al inicio de este capítulo, al considerar a K como un núcleo polinomial de grado N expresado en la forma $K(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ con coeficientes a_k en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, arbitrario. Una vez construido su correspondiente RKHS $\mathcal{H}_K$, una pregunta importante consiste en determinar si existen condiciones bajo las cuales se puede afirmar que las funciones pertenecientes a dicho espacio verifican la propiedad *ZR*. La respuesta la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathcal{H}_K$ el RKHS de funciones enteras proveniente del núcleo polinomial $K(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$, con $a_N \neq 0$ y $a_n \in \mathcal{H}$, para $n = 0, 1, \cdots, N$. Entonces, el espacio $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR si y solamente si el conjunto $\{a_0, a_1, \cdots, a_N\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Probaremos en primer lugar la condición necesaria. Sea $f \in \mathcal{H}_K$ tal que para cierto $x \in \mathcal{H}$, $f(z) = \langle K(z), x\rangle = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_N z^N$, con $\beta_N = \langle a_N, x\rangle \neq 0$. Por hipótesis, en el espacio $\mathcal{H}_K$ se verifica la propiedad *Zero-removing*, con lo cual si $\{r_j\}_{j=1}^{N} \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de raíces de $f(z)$, entonces los polinomios:

$$\beta_N, \beta_N(z - r_N), \beta_N(z - r_N)(z - r_{N-1}), \ldots, \beta_N(z - r_N)(z - r_{N-1}) \ldots (z - r_2)$$

pertenecen a $\mathcal{H}_K$. Consideremos la ecuación

$$\lambda_N a_N + \lambda_{N-1} a_{N-1} + \lambda_{N-2} a_{N-2} + \ldots + \lambda_0 a_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

De la anterior ecuación se deduce que el vector $(\lambda_N, \ldots, \lambda_0)$ es ortogonal en $\mathbb{C}^{N+1}$ a todo vector $(c_N, \ldots, c_0)$ con $c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_0 \in \mathcal{H}_K$. En consecuencia, puesto que $\beta_N \in \mathcal{H}_K$, $\lambda_0 \beta_N = 0$ implica que $\lambda_0 = 0$. Del mismo modo, dado que el polinomio $\beta_N(z - r_N) = \beta_N z - \beta_N r_N \in \mathcal{H}_K$, deducimos que los vectores $(\beta_N, -\beta_N r_N)$ y (λ_1, λ_0) son ortogonales, es decir, $\beta_N \lambda_1 - \beta_N r_N \lambda_0 = 0$ con lo cual, $\lambda_1 = 0$. Siguiendo el mismo procedimiento en forma iterativa, concluimos que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 =, \ldots, = \lambda_{N-1} = 0$. Finalmente, de (4.3) concluimos que $\lambda_N = 0$

Para probar la condición suficiente, supongamos que el conjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{H}$. En tal caso, La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{N+1} \\ & x & \longmapsto & (\langle a_0, x\rangle, \ldots, \langle a_N, x\rangle), \end{array}$$

es sobreyectiva y en consecuencia todo polinomio complejo de grado menor o igual que N pertenece a $\mathcal{H}_K$. Sea $f(z) = \beta_N z^N + \beta_{N-1} z^{N-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0 \in \mathcal{H}_K$ y

$\omega \in \mathbb{C}$, un cero de f. El polinomio

$$\frac{f(z)}{z-\omega} = c_{N-1}z^{N-1} + \ldots + c_1 z + c_0$$

es de grado menor o igual que $N-1$ y puesto que Φ es sobre, existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $\Phi(x) = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}, 0)$. De acuerdo a la manera en que se definió Φ, se concluye que

$$\frac{f(z)}{z-\omega} = \langle K(z), x \rangle \,,$$

o lo que es igual, $f(z)/(z-\omega) \in \mathcal{H}_K$.

□

Algunos espacios $\mathcal{H}_K$ en donde no se verifica la propiedad *ZR*

En este apartado se presentan algunos ejemplos de espacios de funciones enteras $\mathcal{H}_K$, construidos a partir de núcleos analíticos en los cuales la propiedad *ZR* no se cumple:

Ejemplo 4.3.

Sea $K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}$ un núcleo analítico tal que $K(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, todas las funciones en su correspondiente RKHS $\mathcal{H}_K$ tienen un cero en z_0 y la propiedad *ZR* no se cumple en $\mathcal{H}_K$. En efecto, sea f una función entera no nula en $\mathcal{H}_K$ y sea r el orden del cero z_0. La función

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^r},$$

no pertenece a $\mathcal{H}_K$ puesto que ella no se anula en z_0.

Ejemplo 4.4.

Consideremos los espacios $\mathcal{H}_{K_s}$ y $\mathcal{H}_{K_c}$ asociados a los núcleos

$$\begin{array}{cccc} K_s & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[0,\pi] \\ & & z & \longmapsto & K_s(z) \end{array} , \quad [K_s(z)](x) := \operatorname{sen}(zx), \quad x \in [0,\pi].$$

y

$$\begin{array}{cccc} K_c & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[0,\pi] \\ & & z & \longmapsto & K_c(z) \end{array} , \quad [K_c(z)](x) := \cos(zx), \quad x \in [0,\pi].$$

definidos en el ejemplo 2.2 de la página 31. El espacio $\mathcal{H}_{K_s}$ corresponde al espacio de funciones impares en PW_π mientras que $\mathcal{H}_{K_c}$ corresponde al espacio de funciones pares en PW_π. Claramente la propiedad *ZR* no se satisface en estos espacios porque se rompe el carácter de paridad o imparidad de dichas funciones.

Ejemplo 4.5.

Sea $\mathcal{H} = L^2[-\pi, \pi]$. Definimos una familia de núcleos

$$K_m : \mathbb{C} \longrightarrow L^2[-\pi, \pi], \quad m \geq 2,$$

de la siguiente manera:

$$[K_m(z)](t) := \frac{\mathrm{e}^{iz^m t}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nótese que K_m es un núcleo analítico de Kramer, para cada $m \geq 2$. Al calcular su serie de Taylor alrededor del punto $z = 0$ se obtiene:

$$[K_m(z)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} z^{mk}.$$

Entonces, la serie de Taylor de toda función $f \in \mathcal{H}_{K_m}$ definida por el producto interior $f(z) = \big\langle K(_m z), F \big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$ es de la forma

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big\langle (it)^k, F \big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}}{k!} z^{mk}, \quad z \in \mathbb{C}$$

con $F \in L^2[-\pi, \pi]$. Por otra parte, sean G una función no nula en $L^2[-\pi, \pi]$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x) dx = 0$$

y g la función entera de $\mathcal{H}_{K_m}$ tal que $g(z) = \big\langle K_m(z), G \big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$.

Puesto que $\big\langle K_m(0), G \big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} = 0$, tenemos que $g(0) = 0$. Por lo tanto, la serie de Taylor de $g(z)/z$ alrededor del origen tiene la forma

$$\frac{g(z)}{z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big(d_1 z^{m-1} + d_2 z^{2m-1} + , \cdots , \big)$$

donde $d_k = \big\langle (it)^k / k!, G \big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$, $k \in \mathbb{N}$. Como G es una función no nula, $g(z)/z \notin \mathcal{H}_{K_m}$. En consecuencia, en los espacios correspondientes $\mathcal{H}_{K_m}$, con $m \geq 2$, no se verifica la propiedad *ZR*.

El ejemplo anterior se puede generalizar si generamos espacios $\mathcal{H}_{K_P}$ a partir de núcleos $K_P : \mathbb{C} \to L^2[-\pi, \pi]$ definidos en la forma

$$[K_P(z)](t) := \frac{\mathrm{e}^{iP(z)t}}{\sqrt{2\pi}}.$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado mayor o igual a 2. Siguiendo un procedimiento análogo al usado en este último ejemplo, es posible comprobar que en tales espacios $\mathcal{H}_{K_P}$ no se satisface la propiedad *ZR* .

Ejemplo 4.6.

En el espacio $\mathcal{H}_{K_a}$ construido en el ejemplo 3.3 a partir del espacio de Sobolev $\mathcal{H} = H^1(-\pi, \pi)$ y del núcleo analítico de Kramer

$$[K_a(z)](x) = (z-a)\mathrm{e}^{izx} + \operatorname{sen} \pi z \operatorname{senh} x, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

no se verifica la propiedad *Zero-removing*. Para ver esto, consideremos por ejemplo la función $f(z) = (z-a)\operatorname{senc} z$. Esta función pertenece a $\mathcal{H}_{K_a}$ puesto que para todo $z \in \mathbb{C}$, f se puede escribir en la forma,

$$(z-a)\operatorname{senc} z = \left\langle K_a(z), \frac{1}{2\pi} \right\rangle_1 .$$

Sin embargo, aplicando la fórmula de muestreo (3.22) a $f(z)/(z-a) = \operatorname{senc} z$, notamos por el contrario, que esta función no puede pertenecer a dicho RKHS $\mathcal{H}_{K_a}$.

4.2. Series muestrales interpolatorias tipo-Lagrange

En esta sección damos una respuesta a la pregunta planteada al comienzo del capítulo, cuya solución involucra a la propiedad *ZR*. Dicha propiedad es una condición necesaria y suficiente que garantiza que toda fórmula de muestreo no ortogonal como (3.5) desarrollada en un espacio abstracto $\mathcal{H}_K$ proveniente de un núcleo analítico de Kramer K, pueda reescribirse mediante una serie interpolatoria tipo-Lagrange.

Teorema 4.2. *Sea K un núcleo analítico de Kramer respecto a al conjunto de datos (3.2) y $\mathcal{H}_K$ su correspondiente RKHS de funciones enteras. Entonces, la fórmula de muestreo (3.5)*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{a_n} S_n(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

en $\mathcal{H}_K$ se puede escribir como una fórmula interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{Q(z)}{(z-z_n)Q'(z_n)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.4}$$

donde $Q(z)$ es una función entera con ceros simples en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ si y sólo si en el espacio $\mathcal{H}_K$ se cumple la propiedad ZR.

Demostración. Supongamos que la fórmula de muestreo (3.5) en $\mathcal{H}_K$ tiene la forma de una serie interpolatoria tipo-Lagrange (4.4). Probaremos que en este espacio se cumple la propiedad *ZR*. Sea $g \in \mathcal{H}_K$ y supongamos que existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $g(z) = \langle K(z), x \rangle_{\mathcal{H}}$. Por hipótesis, es posible obtener el desarrollo en serie de g mediante la serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(z_n) \frac{Q(z)}{(z-z_n)Q'(z_n)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Consideremos los siguientes casos:

1. Sea ω un cero de g tal que $Q(\omega) \neq 0$. Entonces, de (4.5) tenemos:

$$0 = g(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} g(z_n) \frac{Q(\omega)}{(\omega - z_n)Q'(z_n)},$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} g(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n)Q'(z_n)} - \sum_{n=1}^{\infty} g(z_n) \frac{Q(\omega)}{(\omega - z_n)Q'(z_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(z_n)Q(z)}{Q'(z_n)} \left[\frac{1}{z - z_n} - \frac{1}{\omega - z_n} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(z_n)Q(z)}{Q'(z_n)} \left[\frac{\omega - z_n - (z - z_n)}{(z - z_n)(\omega - z_n)} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(z_n)Q(z)}{Q'(z_n)} \left[\frac{1}{(z_n - \omega)(z - z_n)} \right] (z - \omega) . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definiendo la siguiente función

$$\widetilde{g}(z) := \frac{g(z)}{z - \omega}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.7}$$

observamos inmediatamente de (4.6) que $\widetilde{g}(z)$ verifica una fórmula interpolatoria tipo-Lagrange (4.4); es decir, la función entera $\widetilde{g}(z)$ puede ser recuperada a partir de sus muestras en la sucesión de puntos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante la serie

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n)Q'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Veamos ahora que $\widetilde{g}(z) \in \mathcal{H}_K$; esto es, que es posible representar esta función en la forma $\widetilde{g}(z) = \langle K(z), y \rangle_{\mathcal{H}}$ para algún elemento y en $\mathcal{H}$. El desarrollo de y respecto a $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ la cual es la base dual de la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n^*$, donde los coeficientes en $\ell^2(\mathbb{N})$ están dados por la sucesión

$$\left\{ \langle y, x_n \rangle_{\mathcal{H}} := \frac{\langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}}}{\overline{z_n} - \overline{\omega}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} .$$

De la fórmula (4.4) para la sucesión de funciones muestrales $S_n(z)$, obtenemos que

$$S_n(z) = \frac{a_n Q(z)}{(z - z_n)Q'(z_n)},$$

Por lo tanto, sustituyendo el desarrollo de y en el producto interior y empleando esta última expresión para $S_n(z)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle K(z), y\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle K(z), \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle y, x_n\rangle}_{\mathcal{H}} \langle K(z), x_n^*\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) \overline{\langle y, x_n\rangle}_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) \frac{\overline{\langle x, x_n\rangle}_{\mathcal{H}}}{z_n - \omega} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n Q(z) \langle x_n, x\rangle_{\mathcal{H}}}{(z - z_n) Q'(z_n)(z_n - \omega)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n Q(z)}{(z - z_n) Q'(z_n)} \frac{g(z_n)}{a_n(z_n - \omega)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n) Q'(z_n)} \\
&= \widetilde{g}(z), \quad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\widetilde{g}(z) \in \mathcal{H}_K$.

2. Supongamos que existe algun $m \in \mathbb{N}$ tal que $\omega = z_m$ y $g(\omega) = Q(\omega) = 0$. De la ecuación (4.5) se tiene

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} g(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n) Q'(z_n)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.8}$$

Puesto que z_m es un cero de Q, entonces, haciendo $Q(z) = (z - z_m) R_m(z)$, derivando esta expresión y evalúandola en z_j, $j \in \mathbb{N}$, obtenemos:

$$Q'(z_j) = \begin{cases} R_m(z_j) + (z_j - z_m) R_m'(z_j) = (z_j - z_m) R_m'(z_j), & j \neq m \\ R_m(z_m), & j = m \end{cases}.$$

Por lo tanto, la fórmula (4.8) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{g(z)}{z - z_m} = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} g(z_n) \frac{R_m(z)}{(z - z_n)(z_n - z_m) R_m'(z_n)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.9}$$

Además, debido a que la serie (4.9) converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$, dicha serie define una función continua en $\mathbb{C}$; con lo cual, tomando el límite cuando z tiende a z_m obtenemos:

$$\lim_{z\to z_m} \frac{g(z)-g(z_m)}{z-z_m} = g'(z_m) = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} g(z_n)\frac{R_m(z_m)}{(z_m-z_n)(z_n-z_m)R_m'(z_n)}. \tag{4.10}$$

Al igual que en el caso anterior, probaremos que $g(z)/(z-z_m)\in\mathcal{H}_K$. Para ver esto, en primer lugar, vamos a obtener un desarrollo en serie para esta función el cual es equivalente a (4.9) y en el que utiliza la expresión (4.10):

$$\begin{aligned}
\frac{g(z)}{z-z_m} &= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} g(z_n)\frac{R_m(z)}{(z-z_n)(z_n-z_m)R_m'(z_n)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)R_m(z)}{(z_n-z_m)R_m'(z_n)}\right]\left[\frac{(z_n-z_m)}{(z-z_n)(z_n-z_m)}\right]\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)R_m(z)}{(z_n-z_m)R_m'(z_n)}\right]\left[\frac{z-z_m-(z-z_n)}{(z-z_n)(z_n-z_m)}\right]\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)R_m(z)}{(z_n-z_m)R_m'(z_n)}\right]\left[\frac{z-z_m}{(z-z_n)(z_n-z_m)}-\frac{1}{z_n-z_m}\right]\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\left(\frac{g(z_n)}{z_n-z_m}\frac{Q(z)}{Q'(z_n)}\frac{1}{z-z_n}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{g(z_n)}{z_n-z_m}\frac{R_m(z)}{R_m'(z_n)}\frac{1}{z_m-z_n}\right)\right]\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)Q(z)}{(z_n-z_m)\,(z-z_n)\,Q'(z_n)}\right]\\
&\quad+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)R_m(z_m)}{(z_n-z_m)\,(z_m-z_n)\,R_m'(z_n)}\frac{(z-z_m)\,R_m(z)}{(z-z_m)\,Q'(z_m)}\right]\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)Q(z)}{(z_n-z_m)\,(z-z_n)\,Q'(z_n)}\right]\\
&\quad+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)R_m(z_m)}{(z_n-z_m)\,(z_m-z_n)\,R_m'(z_n)}\frac{Q(z)}{(z-z_m)\,Q'(z_m)}\right]\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}} \left[\frac{g(z_n)Q(z)}{(z_n-z_m)\,(z-z_n)\,Q'(z_n)}\right]+g'(z_m)\frac{Q(z)}{(z-z_m)\,Q'(z_m)}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ahora, vamos a probar que $g(z)/(z-z_m)$ se puede expresar por medio del producto interno $\left\langle K(z),y\right\rangle_{\mathcal{H}}$ donde y pertenece a $\mathcal{H}$, tal que su desarrollo en serie respecto de la base de Riesz $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n^*$, donde sus coeficientes $\langle y, x_n \rangle_{\mathcal{H}}$ en $\ell^2(\mathbb{N})$ se definen como:

$$\langle y, x_n \rangle_{\mathcal{H}} := \begin{cases} \dfrac{\langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}}}{\overline{z_n} - \overline{z_m}}, & \text{si } n \neq m, \\[2ex] \dfrac{\overline{g'(z_m)}}{\overline{a_m}}, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Por otra parte, al calcular $\left\langle K(z), y \right\rangle_{\mathcal{H}}$ obtenemos

$$\left\langle K(z), y \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle K(z), \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} \langle y, x_n \rangle_{\mathcal{H}} \, x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle K(z), \langle y, x_m \rangle_{\mathcal{H}} \, x_m^* \right\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{4.12}$$

Teniendo en cuenta que la fórmula (4.4) proporciona las funciones muestrales $S_n(z) = \dfrac{a_n Q(z)}{(z - z_n) Q'(z_n)}$, el primer producto interno en la derecha de la igualdad (4.12) se convierte en

$$\begin{aligned} \left\langle K(z), \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} \langle y, x_n \rangle_{\mathcal{H}} \, x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} \overline{\langle y, x_n \rangle}_{\mathcal{H}} \langle K(z), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} S_n(z) \overline{\langle y, x_n \rangle}_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} S_n(z) \frac{\overline{\langle x, x_n \rangle}_{\mathcal{H}}}{z_n - z_m} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} \frac{a_n Q(z) \langle x_n, x \rangle_{\mathcal{H}}}{(z - z_n) Q'(z_n)(z_n - z_m)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} \frac{Q(z)}{(z - z_n) Q'(z_n)} \frac{g(z_n)}{(z_n - z_m)}. \end{aligned}$$

Un cálculo análogo para el segundo producto interno en la derecha de la igualdad (4.12) produce

$$\begin{aligned} \left\langle K(z), \langle y, x_m \rangle_{\mathcal{H}} \, x_m^* \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \overline{\langle y, x_m \rangle}_{\mathcal{H}} \langle K(z), x_m^* \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= S_m(z) \overline{\langle y, x_m \rangle}_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{a_m Q(z)}{(z - z_m) Q'(z_m)} \frac{g'(z_m)}{a_m} \\ &= \frac{Q(z)}{(z - z_m) Q'(z_m)} g'(z_m). \end{aligned}$$

Finalmente, comparando con (4.11), concluimos que

$$\frac{g(z)}{z - z_m} = \Big\langle K(z), y \Big\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Luego, $g(z)/(z - z_m)$ pertenece al espacio $\mathcal{H}_K$.

Para probar la condición suficiente, probaremos que la fórmula de muestreo (3.5) puede ser escrita como una serie interpolatoria tipo-Lagrange para alguna función entera Q. En primer lugar, puesto que las funciones muestrales $S_n(z) = \langle K(z), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}$ pertenecen al espacio $\mathcal{H}_K$, entonces, dichos elementos satisfacen la propiedad *ZR*; esto es, para cada $n \in \mathbb{N}$, si ω es un cero de $S_n(z)$ se tiene que $S_n(z)/(z-\omega) \in \mathcal{H}_K$. Por otra parte, la sucesión compleja $\{z_j\}_{j\neq n}$ constituye el conjunto de ceros de $S_n(z)$. En efecto, empleando la condición de biortogonalidad $\langle x_n, x_m^* \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{n,m}$, de las bases de Riesz, tenemos

$$S_n(z_j) \quad = \quad \Big\langle K(z_j), x_n^* \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \Big\langle a_j x_j, x_n^* \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \begin{cases} 0 & j \neq n, \\ a_j & j = n \end{cases}$$

Se probará ahora que $\{z_j\}_{j\neq n}$ son los únicos ceros de S_n. Para ver esto, observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función compleja

$$F_n(z) = (z - z_n)\frac{S_n(z)}{z - \omega}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

pertenece a $\mathcal{H}_K$ ya que es posible escribirla como suma de funciones enteras en $\mathcal{H}_K$ de la siguiente manera:

$$F_n(z) = S_n(z) + (\omega - z_n)\frac{S_n(z)}{z - \omega}$$

Ahora bien, si $\omega \notin \{z_j\}_{j\neq n}$ entonces $F_n(z_j) = 0$ para todo elemento de la sucesión $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ y esto implica por la fórmula de muestreo (3.5) del teorema 3.1, que $F_n(z) \equiv 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, puesto que $(z - z_n)/(z - \omega)$ no es idénticamente nula, obtendríamos $S_n(z) \equiv 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual evidentemente es una contradicción.

Además, si z_k es un cero múltiple de $S_n(z)$, repitiendo el argumento anterior, se llega del mismo modo a deducir que $S_n(z) \equiv 0$ con lo cual concluimos que la función $S_n(z)$ tiene ceros simples únicamente en el conjunto $\{z_j\}_{j\neq n}$.

Por lo tanto, elegimos una función entera P con ceros simples en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función entera sin ceros A_n tal que

$$(z - z_n)S_n(z) = P(z)A_n(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ahora se probará la existencia de una función entera sin ceros $A(z)$ y una sucesión compleja no nula $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$ se satisface la igualdad $A_n(z) = \alpha_n A(z)$.

Para tal efecto, consideremos las funciones

$$G_{n,m}(z) := (z - z_n)\frac{S_n(z)}{z - z_m}, \quad z \in \mathbb{C}$$

en $\mathcal{H}_K$, las cuales tienen sus ceros en $\{z_j\}_{j \neq m}$ para $m \neq n$. Obsérvese que,

$$G_{n,m}(z_n) = 0, \quad n \neq m,$$

y

$$G_{n,m}(z_m) = \lim_{z \to z_m} \frac{z - z_n}{z - z_m} S_n(z) = (z_m - z_n)S_n'(z_m)\ ,$$

con lo cual, aplicando la fórmula muestral (3.5) a $G_{n,m}(z)$, obtenemos:

$$G_{n,m}(z) = (z_m - z_n)S_n'(z_m)\frac{S_m(z)}{a_m}. \tag{4.13}$$

Si en (4.13) fijamos $m = 1$ obtenemos,

$$(z - z_n)\frac{S_n(z)}{z - z_1} = (z_1 - z_n)S_n'(z_1)\frac{S_1(z)}{a_1}.$$

En consecuencia, concluimos que $\alpha_n = (z_1 - z_n)S_n'(z_1) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\alpha_1 = 1$ para $n = 1$ y $A_n(z) = \alpha_n A(z)$ con $A = A_1$.

Finalmente, hacemos $Q(z) := P(z)A(z)$. Teniendo en cuenta que

$$S_n(z) = \frac{\alpha_n Q(z)}{z - z_n},$$

para $z \neq z_n$; y,

$$S_n(z_n) = \lim_{z \to z_n} \frac{\alpha_n Q(z)}{z - z_n} = \alpha_n Q'(z_n) = a_n,$$

al sustituir en la fórmula (3.5) llegamos a la serie interpolatoria tipo-Lagrange:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n)\frac{Q(z)}{(z - z_n)Q'(z_n)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

□

Algunas observaciones importantes relacionadas con el teorema 4.2 son las siguientes:

1. En primer lugar, nótese que en el desarrollo de la prueba de la condición suficiente, se encontró que la función entera Q verifica la siguiente relación

$$(z - z_n)S_n(z) = \sigma_n Q(z),$$

para algunas constantes complejas no nulas σ_n, $n \in \mathbb{N}$. Cuando es posible factorizar a Q en la forma $Q(z) = P(z)A(z)$ en donde A es una función entera sin ceros y P representa un producto canónico con ceros simples en $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces la fórmula interpolatoria tipo-Lagrange (4.4) se puede escribir como la fórmula cuasi interpolatoria

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{A(z)P(z)}{A(z_n)(z - z_n)P'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

2. Por otra parte, obsérvese que si alguna fórmula de muestreo particular tipo (3.5) puede ser escrita como una fórmula interpolatoria tipo-Lagrange, entonces, lo mismo ocurre para todas las fórmulas muestrales obtenidas según el teorema 3.1. En otras palabras, si en el espacio $\mathcal{H}_K$ no se verifica la propiedad *ZR*, podemos concluir que toda fórmula de muestreo del tipo (3.5) no se puede escribir como una serie interpolatoria tipo-Lagrange.

A continuación presentamos algunos ejemplos de fórmulas de muestreo para ilustrar en ciertos casos o bien simultáneamente los teoremas 3.1 y 4.2; o, en otros, al fallar en el espacio correspondiente la propiedad *Zero-removing*, se exhiben fórmulas interpolatorias las cuales no son tipo-Lagrange.

Ejemplo 4.7. ***(Interpolación clásica de polinomios)***

Sea $\mathcal{P}_N[\mathbb{C}]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a N con coeficientes complejos. De acuerdo al teorema 4.1, éste espacio coincide con su correspondiente RKHS $\mathcal{H}_K$, en donde K es el núcleo polinomial

$$K(z) := \sum_{k=0}^{N} \mathbf{a_k} z^k$$

y $\{\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_N}\}$ es una base del espacio unitario $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{N+1}$.

Sea $\{z_n\}_{n=0}^{N}$ una sucesión de $N+1$ puntos diferentes en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; entonces, K es un núcleo analítico de Kramer respecto a las sucesiones $\{z_n\}_{n=0}^{N}$ y $\{a_n = 1\}_{n=0}^{N}$. En efecto, haciendo $K(z_n) = \mathbf{b_n}$ para $n = 0, 1, \cdots, N$ y utilizando determinantes de Vandermonde, observamos que la sucesión $\{\mathbf{b_n}\}_{n=0}^{N}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}^{N+1}$; es decir, es una base de Riesz del espacio $\mathbb{C}^{N+1}$.

En consecuencia, de acuerdo a los teoremas 3.1 y 4.2, para toda $f \in \mathcal{P}_N[\mathbb{C}]$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} f(z_n)S_n(z) = \sum_{n=0}^{N} f(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n)Q'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

donde para cada $n = 0, 1, \cdots, N$, las funciones muestrales $S_n(z)$ están dadas por la expresión $S_n(z) = \langle K(z), \mathbf{b^*_n} \rangle$; $\{\mathbf{b^*_n}\}_{n=0}^N$ es la base dual de $\{\mathbf{b_n}\}_{n=0}^N$ en $\mathbb{C}^{N+1}$ y además, $Q(z) = \prod_{n=0}^{N} (z - z_n)$.

Ejemplo 4.8. ***(Muestreo irregular: Teorema de Paley-Wiener-Levinson)***

En este clásico teorema en el cual se generaliza la fórmula de muestreo de Whittaker-Shannon-Kotelnikov se reconstruyen funciones en PW_π a partir de sus muestras en una sucesión de números reales $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, no están equiespaciados, que verifican la siguiente condición ([85], [93]):

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |t_n - n| < \frac{1}{4}.$$

Al igual que en el teorema WSK, la fórmula de muestreo obtenida es una serie interpolatoria tipo-Lagrange.

En este ejemplo se presenta una nueva caracterización. Consideremos una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\text{Re } z_n - n| < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\text{Im } z_n| < \infty.$$

Es conocido (ver generalización del teorema $1/4$ de Kadec [116], p. 164) que

$$\left\{ \mathrm{e}^{iz_n\omega}/\sqrt{2\pi} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

es una base de Riesz de $L^2[-\pi, \pi]$. Supongamos que $\{g_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es su base dual en $L^2[-\pi, \pi]$. El núcleo de Fourier $[K(z)](\omega) = \mathrm{e}^{iz\omega}/\sqrt{2\pi}$, con $\omega \in [-\pi, \pi]$ es, de acuerdo a la definición 3.1 un núcleo analítico de Kramer para las sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{a_n = 1\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Por lo tanto, aplicando los teoremas 3.1 y 4.2, obtenemos que para toda $f \in PW_\pi$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z_n) S_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z_n) \frac{Q(z)}{(z - z_n)Q'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

donde para cada $n \in \mathbb{Z}$, las funciones muestrales $S_n(z)$ están dadas por la expresión $S_n(z) = \langle K(z), g_n \rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$ y además, $Q(z)$ es una función entera con ceros simples en $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Un resultado conocido debido a Titchmarsh [110], asegura que todas las funciones pertenecientes al espacio PW_π quedan completamente determinadas por sus ceros. Como consecuencia de dicho resultado veamos que salvo un factor constante, la función entera Q coincide con el producto infinito

$$(z - z_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{-n}}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.14}$$

Para probarlo, en primer lugar observemos que la función $S_0(z) \in PW_\pi$ tiene ceros simples únicamente en $\{z_m\}_{m\neq 0}$ concretamente, $S_0(z_m) = \delta_{0,m}$. En efecto, supongamos en caso contrario que existe un cero ν de $S_0(z)$ con $\nu \notin \{z_m\}_{m\neq 0}$. De acuerdo al teorema de Paley-Wiener, la función

$$S(z) := (z - z_0)S_0(z)/(z - \nu)$$

pertenece a PW_π y se anula en todo z_n. Teniendo en cuenta la completitud de la base de Riesz $\left\{e^{iz_n\omega}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, llegaríamos a $S \equiv 0$, lo que es una contradicción.

En consecuencia, usando el resultado anteriormente mencionado debido a Titchmarsh, la función S_0 coincide salvo un factor constante con el producto convergente (4.14), con lo cual, del teorema 4.2, obtenemos $(z - z_n)S_n(z) = \sigma_n Q(z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y así llegamos al resultado buscado.

Ejemplo 4.9. ***(Transformadas seno y coseno finitas)***

Sea f una función par perteneciente al espacio PW_π la cual se escribe en la forma $f(z) = \left\langle \cos zx, F(x) \right\rangle_{L^2[0,\pi]}$, $z \in \mathbb{C}$, donde $F \in L^2[0,\pi]$. Su desarrollo mediante la serie cardinal se puede reescribir como la fórmula de mustreo (véase [71, p. 5])

$$f(z) = f(0)\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{(-1)^n z \operatorname{sen}\pi z}{z^2 - n^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sin embargo, esta fórmula no puede ser escrita como una serie interpolatoria tipo-Lagrange, puesto que de acuerdo al ejemplo 4.4, p. 66, el RKHS $\mathcal{H}_{K_c}$ proveniente del núcleo $[K_c(z)](x) = \cos zx$ no satisface la propiedad ZR.

Del mismo modo, si $f \in PW_\pi$ es impar, se escribe como $f(z) = \left\langle \operatorname{sen} zx, F(x) \right\rangle_{L^2[0,\pi]}$, $z \in \mathbb{C}$, donde $F \in L^2[0,\pi]$. Su desarrolo en serie se reduce a la fórmula de muestreo [71],

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{(-1)^n n \operatorname{sen}\pi z}{z^2 - n^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Análogamente, esta fórmula no puede ser escrita como una fórmula interpolatoria tipo-Lagrange, ya que en este caso el espacio $\mathcal{H}_{K_s}$ (del mismo ejemplo 4.4 de la sección 4.2), cuyo núcleo es $[K(z)](x) = \operatorname{sen} zx$, no satisface la propiedad ZR.

En el próximo apartado, en relación con fórmula de muestreo del teorema 4.2, presentamos un par de teoremas de muestreo tipo-Lagrange. En concreto, consideramos los espacios $\mathcal{H}_K$ provenientes de núcleos de Kramer discretos definidos mediante polinomios ortogonales de primera y segunda especie relacionados con el problema de momentos indeterminado de Hamburger. Dichos núcleos se estudiaron en el ejemplo 3.4 de la página 50.

Fórmulas interpolatorias tipo-Lagrange asociadas a problemas de momentos

Consideremos el RKHS

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ | \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\}.$$

el cual proviene del núcleo analítico de Kramer $[K(z)]\,(n) = P_n(z), \ n \in \mathbb{N}_0$, definido sobre el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}_0)$; este núcleo discreto se presentó en el ejemplo 2.3, página 32 y fue introducido en el ejemplo 3.4 con relación al problema indeterminado de momentos de Hamburger. En el siguiente teorema empleamos una vez más la función meromorfa

$$m_\infty^t(z) = -\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)}, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R},$$

descrita en (3.31), página 49, cuyos polos son reales y simples.

Teorema 4.3. *Sea μ_t una medida N-extremal para un problema indeterminado de momentos de Hamburger y sea $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de sus polinomios ortogonales asociados. Supongamos que la sucesión $\{z_m^t\}_{m=0}^{\infty}$ es el conjunto de los ceros de $B(z)t - D(z)$ si $t \in \mathbb{R}$ o los ceros de $B(z)$ si $t = \infty$. Entonces, toda función*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)\,, \ \ z \in \mathbb{C},$$

en donde $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ puede ser recuperada a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(z_m^t)\}_{m=0}^{\infty}$ mediante de la serie interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(z_m^t) \frac{G_t(z)}{(z - z_m^t) G_t'(z_m^t)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{4.15}$$

donde

$$G_t(z) = \begin{cases} B(z)t - D(z) & t \in \mathbb{R} \\ B(z) & t = \infty\,. \end{cases}$$

La convergencia de la serie (4.15) es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Si el problema de momentos de Hamburger es indeterminado, entonces, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} |P_n(z)|^2$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ [1]. Consideremos $K(n, z) = P_n(z)$ el núcleo analítico de Kramer el cual verifica (3.32) y (3.33). De acuerdo al lema 3.1, página 48, la sucesión

$$\left\{P_0(z_m^t), P_1(z_m^t), P_2(z_m^t), P_3(z_m^t)\ldots.\right\}_{m \in \mathbb{N}_0}$$

es una base ortogonal para $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Como consecuencia del teorema discreto de Kramer (p. 50), resulta la fórmula de muestreo

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(z_m^t) \frac{1}{\|\{K(\cdot, z_m^t)\}\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} K(n, z_m^t) K(n, z), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{4.16}$$

donde por efectos prácticos en la notación, en (4.16) no se emplea explícitamente $P_n(z)$.

Basta ver, para concluir la prueba, que la fórmula (4.16) puede ser escrita como la serie tipo-Lagrange (4.15). Para tal efecto, sea

$$u_m^t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K(n, z_m^t) K(n, z). \tag{4.17}$$

Puesto que $\{K(\cdot, z_m^t)\} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$ y $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, la función $u_m^t(z)$ es una función entera de tipo exponencial minimal (véase [14, p. 35]). Recuérdese que una función es de tipo exponencial minimal si para todo $\delta > 0$, existe una constante $A(\delta)$, tal que

$$\left|u_m^t(z)\right| \leq A(\delta) \mathrm{e}^{\delta|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Las funciones enteras de tipo exponencial minimal están determinadas, salvo un factor constante, por sus ceros [14, p. 34]; con lo cual, puesto que los ceros de u_m^t son $\left\{z_j^t\right\}_{j \neq m}$, existe una constante $\alpha_m^t \in \mathbb{C}$ tal que

$$(z - z_m^t) u_m^t(z) = \alpha_m^t G_t(z)\,, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.18}$$

De (4.18) se obtiene $u_m^t(z_m^t) = \alpha_m^t G_t'(z_m^t)$. Además, de (4.17) se obtiene

$$\alpha_m^t G_t'(z_m^t) = \left\|\{K(\cdot, z_m^t)\}\right\|_{\ell^2}^2,$$

en consecuencia,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K(n, z_m^t) K(n, z)}{\|\{K(\cdot, z_m^t)\}\|^2} = \frac{G_t(z)}{(z - z_m^t) G_t'(z_m^t)}.$$

□

Por otra parte, recordemos que en el ejemplo 3.4 de la página 50, en relación con la versión discreta del teorema de muestreo de Kramer, definimos un RKHS $\mathcal{H}_K$ proveniente del núcleo polinomial $[K(z)](n) = Q_n(z),\ n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{Q_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$

corresponde a los polinomios ortogonales de segunda especie asociados a los polinomios ortogonales $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ relacionados al problema de momentos indeterminado de Hamburger, tal que

$$Q_n(z) = \int \frac{P_n(z) - P_n(u)}{z-u} d\mu_t(u), \quad z \in \mathbb{C}.$$

donde μ_t es una medida N-extremal.

Además, dichos polinomios satisfacen la igualdad $\tilde{P}_n(z) = a_0 Q_{n+1}(z)$, donde $\{\tilde{P}_n\}$ son los polinomios ortogonales de primera clase asociados al *problema de momentos desplazado.*

Por lo tanto, (véase [57]), el teorema 4.3 se puede adaptar al *problema de momentos desplazado* para obtener la fórmula de muestreo del siguiente corolario. Recordemos que las funciones enteras $\tilde{B}(z)$ y $\tilde{D}(z)$ componentes de la matriz de Nevanlinna están dadas por las relaciones $\tilde{B}(z) = -C(z) - b_0 A(z)$ y $\tilde{D}(z) = a_0^2 A(z)$.

En el RKHS

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \mid \ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(z), \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\},$$

se verifica el siguiente resultado:

Corolario 4.1. *Supongamos que $\{\omega_m^t\}_{m=1}^{\infty}$ son los ceros de $\widetilde{B}(z)t - \widetilde{D}(z)$ si $t \in \mathbb{R}$ o los ceros de $\widetilde{B}(z)$ si $t = \infty$. Entonces, toda función de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Q_n(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

donde $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{N})$, puede ser recuperada a partir de sus muestras $\{f(\omega_m^t)\}_{m=0}^{\infty}$ mediante la serie interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(\omega_m^t) \frac{G_t(z)}{(z - \omega_m^t) G_t'(\omega_m^t)}, \tag{4.19}$$

donde

$$G_t(z) = \begin{cases} \widetilde{B}(z)t - \widetilde{D}(z) & t \in \mathbb{R}, \\ \widetilde{B}(z) & t = \infty. \end{cases}$$

La convergencia de la serie (4.19) es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Como consecuencia de los teoremas 4.2 y 4.3 y del corolario 4.1, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.2. *En los espacios de Hilbert de funciones enteras con núcleo reproductor*

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \mid \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \quad \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\},$$

y

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \mid \ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(z), \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\},$$

se verifica la propiedad Zero-Removing.

En los ejemplos finales haremos alusión a las fórmulas de muestreo (4.15) y (4.19). En concreto, se emplean núcleos generados a partir de algunos modelos típicos de polinomios hipergeométricos discretos cuyos problemas de momentos son indeterminados con lo cual es posible – siguiendo la teoría precedente – encontrar series muestrales en los correspondientes espacios $\mathcal{H}_K$.

Ejemplo 4.10. *(Una fórmula de muestreo relacionada con los q^{-1}–polinomios continuos de Hermite, $0 < q < 1$)*

Estos polinomios son la versión renormalizada de los q–polinomios continuos de Hermite y tienen representación explícita de la siguiente forma [75],

$$h_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} (-1)^k q^{k(k-n)} (x + \sqrt{x^2+1})^{n-2k},$$

donde se ha usado la notación factorial q-desplazada,

$$(c_1, c_2, \cdots, c_p; q)_n = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{p} (1 - c_j q^{k-1}),$$

con $n \in \mathbb{N}_0$. Además, verifican la relación de recurrencia a tres términos

$$h_{n+1}(x|q) = 2x h_n(x|q) - q^{-n}(1-q^n) h_{n-1}(x|q), \quad h_0 = 1, \quad h_1 = 2x$$

para $n > 0$ y $0 < q < 1$. El problema de momentos asociado con $\{h_n(x|q)\}$ es indeterminado, [75] y sus normas están dadas por,

$$\|h_n\| = \sqrt{\frac{(q;q)_n}{q^{n(n+1)/2}}}.$$

La parametrización de Nevanlinna de las medidas N–extremales se encuentra igualmente en la referencia [75]. En particular, cuando el parámetro t toma el valor 0, la función $G_0(z)$ del teorema 4.3 es igual a la componente $D(z)$ de la matriz de Nevanlinna,

$$D(z) = -\frac{(qe^{2\xi}, qe^{-2\xi}; q^2)_\infty}{(q; q^2)^2_\infty}$$

donde $z = \operatorname{senh} \xi$. Sus ceros son $\pm\lambda_n$ con $n = 0, 1, \dots$ con

$$\lambda_n = \frac{1}{2}(q^{-n-1/2} - q^{n+1/2}).$$

Entonces, para toda función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{h_n(x|q)}{\|h_n\|}, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde $\{a_n\} \in \ell^2$, obtenemos la siguiente fórmula de muestreo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(-\lambda_n) \frac{D(z)}{(z + \lambda_n)D'(-\lambda_n)} + \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) \frac{D(z)}{(z - \lambda_n)D'(\lambda_n)} .$$

Ejemplo 4.11. *(Muestreo relacionado con polinomios asociados a procesos de nacimiento y muerte, con tasas de transición cuárticas)*

Los procesos de nacimiento y muerte están determinados por tasas de transición $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ para nacimientos y $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ para muertes, donde $\lambda_n > 0$, $\mu_{n+1} > 0$ para $n \geq 0$ y $\mu_0 \geq 0$. En particular, cuando estas tasas son polinomiales en la variable n, entonces, es importante – debido a sus aplicaciones –, encontrar soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov,

$$P'_{n,m}(t) = \lambda_{n-1} P_{m,n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{m,n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_{m,n}(t) \tag{4.20}$$

$$P_{m,n}(0) = \delta_{n,m} \tag{4.21}$$

donde $P_{m,n}$ denota la probabilidad de transición (esto es, la probabilidad de que el sistema pase de un estado m a un estado n en un tiempo t). En [79], se relacionaron por primera vez dichas ecuaciones con ciertos polinomios ortogonales. Concretamente, se probó que la expresión

$$P_{n,m}(t) = \frac{1}{\pi_m} \int_0^\infty F_m(x) F_n(x) \mathrm{e}^{-tx} d\mu(x)$$

es solución de (4.20), donde $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ representa una familia de polinomios que verifican la ecuación en diferencias (véanse, [17], [112], [113])

$$(\lambda_n + \mu_n - x) F_n(x) = \mu_{n+1} F_{n+1}(x) + \lambda_{n-1} F_{n-1}(x) \quad n \geq 0 \tag{4.22}$$

$$F_{-1}(x) = 0\,; \quad F_0(x) = 1,$$

y

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_0 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1$$

Además, de la condición (4.21) se sigue la ortogonalidad de los polinomios $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, puesto que

$$\frac{1}{\pi_m} \int_0^{\infty} F_m(x) F_n(x) d\mu(x) = \delta_{n,m}.$$

En este ejemplo nos referimos a los polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ que resultan cuando se consideran tasas de transición cuárticas,

$$\lambda_n = (4n+1)(4n+2)^2(4n+3) \quad \mu_n = (4n-1)(4n)^2(4n+1)$$

los cuales aparecieron originalmente en [113]. Estos polinomios se definen mediante la expresión

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi_n}} F_n(x), \tag{4.23}$$

con

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_0 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1$$

y verifican la relación de recurrencia a tres términos,

$$\begin{gathered} xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x) \quad n \geq 0 \\ P_{-1}(x) = 0\,; \quad P_0(x) = 1 \end{gathered}$$

donde

$$a_n = \lambda_n + \mu_n \quad b_n = \sqrt{\lambda_n \mu_{n+1}}, \;\; n \geq 0.$$

La sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es la familia de polinomios ortogonales con respecto a una sucesión normalizada de momentos s la cual es indeterminada, para los problemas de momentos de Hamburger y de Stieltjes (véase [17]).

La función entera D en la parametrización de Nevanlinna está dada por

$$D(z) = \frac{4}{\pi}\sqrt{z}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt[4]{z}}{2}K_0\right)\mathrm{senh}\left(\frac{\sqrt[4]{z}}{2}K_0\right),$$

cuyos ceros son $z_n = (2\pi n/K_0)^4$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $K_0 = \dfrac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{\pi}}$, [17].

Usando el teorema 4.3 para $t = 0$, toda función de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$,

$z \in \mathbb{C}$ donde $\{a_n\} \in \ell^2$ puede ser escrita como

$$f(z) = f(0)\frac{4\sqrt{z}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt[4]{z}}{2}K_0\right)\mathrm{senh}\left(\frac{\sqrt[4]{z}}{2}K_0\right)}{zK_0^2} +$$
$$+\frac{16\pi}{K_0^2}\sum_{n=1}^{\infty} f\left[\left(\frac{2\pi n}{K_0}\right)^4\right]\frac{(-1)^n n}{\mathrm{senh}(n\pi)}\frac{\sqrt{z}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt[4]{z}}{2}K_0\right)\mathrm{senh}\left(\frac{\sqrt[4]{z}}{2}K_0\right)}{\left(z-\left(\frac{2\pi n}{K_0}\right)^4\right)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde hemos usado que

$$D'(0) = \frac{K_0^2}{\pi} \quad \text{y} \quad D'\left[\left(\frac{2\pi n}{K_0}\right)^4\right] = \frac{K_0^2}{4n\pi^2}(-1)^n\,\mathrm{senh}(n\pi)\,.$$

Ejemplo 4.12. *(Muestreo relacionado con q–polinomios de Al-Salam–Carlitz)*

Guardando cierta relación con el ejemplo 4.11, tenemos los polinomios mónicos $V_n(x) = V_n^{(a)}(x;q)$ introducidos en [2], los cuales están determinados por la relación de recurrencia a tres términos

$$V_{n+1}(z) = (z-(1+a)q^{-n})V_n(z) - aq^{-(2n-1)}(1-q^n)V_{n-1}(z), \tag{4.24}$$

con $V_{-1}(z) = 0$ y $V_0(z) = 1$. La conexión con los polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ asociados con procesos de nacimiento y muerte se obtiene de la siguiente manera: A partir de la relación

$$F_n(z) = \alpha_n V_n(z+1), \tag{4.25}$$

donde

$$\alpha_n = (-1)^n\frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n},$$

la ecuación (4.24) se convierte en (4.22), usando en particular, las tasas de nacimiento y muerte

$$\lambda_n = aq^{-n}\,, \qquad \mu_n = q^{-n}-1\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Además, sustituyendo (4.25) en (4.23), con los valores dados de α_n y las tasas anteriormente mencionadas, dicha conexión se manifiesta mediante la fórmula

$$V_n(z+1) = \frac{\sqrt{(q;q)_n(aq)^n}}{q^{n(n+1)/2}}P_n(z)\,.$$

Teniendo en cuenta el siguiente rango de valores de los parámetros, $a > 0$ y $0 < q < 1$, entonces, el correspondiente problema de Hamburger es indeterminado si se verifica

$q < a < q^{-1}$. En la parametrización de Nevanlinna, la función entera $D(z)$ está dada por, [17],

$$D(z) = -\frac{(1+z;q)_\infty}{(q;q)_\infty (aq;q)_\infty}\,,$$

la cual tiene sus ceros en $z_n = q^{-n} - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Además, es conocido (véase [17]), que

$$D'(z_n) = \frac{(-1)^n (q;q)_n}{(aq;q)_\infty} q^{-n(n-1)/2}\,.$$

En consecuencia, toda función en el espacio definida mediante la serie

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

donde $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, satisface la fórmula de muestreo

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(q^{-n}-1) \frac{(-1)^{n+1}\,(1+z;q)_\infty\, q^{n(n-1)/2}}{(z-q^{-n}+1)\,(q;q)_\infty\,(q;q)_n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

5

Teoría de Muestreo en Espacios de De Branges

En este capítulo presentaremos algunos de los resultados de muestreo analítico obtenidos en los capítulos 3 y 4 dentro de nuevos escenarios como son los espacios de De Branges. Introducidos a comienzos de la década del sesenta del siglo anterior por Louis de Branges, estos son espacios de Hilbert cuyos elementos son funciones enteras, los cuales se definen a partir de tres propiedades (esta construcción apareció por primera vez en [22], véanse también [23] y [20]), mediante las cuales se prueba la existencia de una función entera E la cual no se anula en el semiplano superior $\mathbb{C}^+ = \{z : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y con base en esta función, se construye el correspondiente espacio denotado $\mathcal{H}(E)$. El procedimiento recíproco también es válido; es decir, es posible (supuesta la existencia de dicha función E), generar un espacio de Hilbert el cual satisface las aludidas propiedades y se convierte en el espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$.

A lo largo de esta memoria hemos mencionado reiteradamente al espacio de Paley-Wiener PW_π para ilustrar algunos desarrollos teóricos obtenidos. Recordemos que dicho espacio se define como el conjunto de funciones que se obtienen mediante la imagen de la transformada inversa de Fourier de las funciones cuadrado integrables, cuyo soporte está en el intervalo $[-\pi, \pi]$. También hemos mencionado el clásico teorema de Paley-Wiener, – particularmente en el capítulo 4 – el cual identifica a PW_π con la clase de funciones de tipo exponencial a lo mas π cuya restricción al eje real es cuadrado integrable. Pues bien, actualmente es conocido que la teoría general de los espacios de De Branges permite dar generalizaciones de dicho teorema. Esto lo hizo de Branges dentro de un contexto más general – sin utilizar el análisis de Fourier –

que involucra el desarrollo abstracto de ciertos espacios de Hilbert de funciones enteras $\mathcal{H}(E)$ hoy conocidos como espacios de De Branges, (véase el ejemplo 5.1). Por tal razón, algunos autores hacen mención de la teoría de los espacios de De Branges como una generalización del análisis de Fourier clásico (por ejemplo, véase [10]).
En la actualidad, dichos espacios aparecen en diferentes contextos; por ejemplo, aparecen en la teoría espectral de los operadores de Schrödinger, en la teoría de predicción de procesos gaussianos, en problemas de momentos de Hamburguer o Stieltjes, en la teoría de Krein de operadores de Volterra y operadores enteros, en ecuaciones diferenciales ordinarias, en problemas de aproximación mediante funciones enteras de tipo exponencial, entre otros.

Respecto a su estructura matemática, la clase de funciones enteras pertenecientes a $\mathcal{H}(E)$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor en el cual se verifica la propiedad *Zero-removing*. Este último hecho es de especial interés para nuestros propósitos debido a que en la sección 5.2 probaremos un teorema de muestreo análogo al teorema 4.2 (p. 68) de la sección 4.3. Además uno de los objetivos centrales de este capítulo consiste en establecer algunas condiciones que permitan identificar un espacio $\mathcal{H}_K$ proveniente de un núcleo analítico de Kramer con un espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 5.1 se hace un breve recorrido acerca de la construcción de los espacios de De Branges; se hará mención de ciertas propiedades fundamentales, algunas de las cuales emplearemos posteriormente para tratar cuestiones de muestreo en dichos espacios. Estos tópicos están contenidos en la sección 5.2 en la cual presentaremos algunas fórmulas de muestreo; y, en la sección 5.3, estudiaremos una caracterización de un RKHS de funciones enteras como un espacio de De Branges. En particular, utilizando la teoría de muestreo, estudiaremos cuándo un espacio $\mathcal{H}_K$ es isométrico a un espacio de De Branges.

5.1. Los espacios de De Branges

Como se manifestó en la introducción al capítulo, todo espacio de De Branges se puede construir o bien a partir de tres propiedades, o con base en una función entera E sin ceros en el semiplano $\mathbb{C}^+ = \{z : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, la cual determina completamente al espacio. Dicha función pertenece a la llamada clase de Hermite-Biehler *HB* de funciones enteras (véanse, por ejemplo, Levin [83] o Boas [19]), la cual fue introducida por Krein y desempeña un papel fundamental en la extensión del criterio de Hermite-Biehler para polinomios a funciones enteras arbitrarias.

En el siguiente apartado presentamos brevemente la construcción de un espacio de De Branges a partir de la función E, su caracterización como RKHS y la introducción de algunas propiedades útiles. Posteriormente, describiremos la "axiomatización" de estos espacios (véase [22]), esto quiere decir, que se formulan condiciones mediante las cuales un espacio de Hilbert de funciones es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges.

Los espacios de De Branges y la clase *HB*

Definición 5.1. *Una función entera $E(z)$ se dice que pertenece a la clase de Hermite-Biehler,* HB*, si no tiene ceros en el semiplano superior $\mathbb{C}^+$ y además verifica la desigualdad*

$$|E(\overline{z})| < |E(z)|, \qquad \operatorname{Im}(z) > 0. \tag{5.1}$$

Se puede dar una definición análoga a (5.1) con la desigualdad contraria, en cuyo caso E no tiene ceros en el semiplano inferior, (véase [83, p. 307]). Se dice que dicha función entera es de Hermite-Biehler en sentido estricto si además no tiene ceros sobre el eje real. Toda función entera de tipo exponencial necesariamente satisface (5.1) si no tiene ceros en el semiplano superior y además verifica alguna condición general de crecimiento [19].

Antes de definir formalmente el espacio $\mathcal{H}(E)$ se requieren los conceptos de funciones analíticas de *tipo acotado* y de *tipo medio* no positivo. Aquí usaremos notación estándar propia de la teoría de espacios de Hardy en el semiplano complejo (véase, por ejemplo, [65]).

Definición 5.2. *Una función f analítica en una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se denomina de* ***tipo acotado*** *en Ω si existen funciones P y Q analíticas y acotadas en Ω, tales que $f = P/Q$ donde Q no es idénticamente nula.*

Adoptaremos la notación $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{C}^+)$ para designar a la clase de funciones analíticas en $\mathbb{C}^+$ de *tipo acotado* en este semiplano. Por otra parte, es conocido dentro de la teoría de funciones analíticas, que al estudiar funciones de *tipo acotado*, analíticas en el semiplano superior, existe (de acuerdo al teorema de factorización de Nevanlinna) un número real que mide cierta condición de crecimiento de una función f en esa región del plano complejo. Dicho número recibe el nombre de *tipo medio de f* y está relacionado con el concepto tipo exponencial (recuérdese que una función entera es de tipo exponencial si existen un par de constantes A y B tales que $|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|}$, $z \in \mathbb{C}$), de acuerdo a un resultado de M. G. Krein que asegura que una función entera es de tipo exponencial si es de *tipo acotado* en los semiplanos superior e inferior en cuyo caso el tipo exponencial es igual al máximo de los *tipos medios* en los dos semiplanos. Por lo tanto, el *tipo medio* se considera una generalización del tipo exponencial para funciones no necesariamente enteras (véase [20, p. 26]). En el semiplano superior, una forma de calcular este número consiste en analizar el comportamiento de la función sobre el semieje imaginario positivo. En concreto, si $f \in \mathcal{N}(\mathbb{C}^+)$, el número

$$\operatorname*{lím\,sup}_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \log |f(iy)|$$

es finito y se denomina el *tipo medio* de f. Cuando el *tipo medio* es no positivo, equivalentemente se emplea la siguiente definición:

Definición 5.3. *La función $f(z) = x + iy$, con $z = x + iy$, en $\mathcal{N}(\mathbb{C}^+)$ se denomina de **tipo medio no positivo** si cuando $y \to \infty$, su crecimiento está controlado por $\mathrm{e}^{\mu y}$ para cada $\mu > 0$, sobre el semieje $\{iy : y > 0\}$.*

Definición 5.4. ***(Espacio de De Branges)***

Sea E una función de la clase HB. Se define $\mathcal{H}(E)$ como el espacio de funciones enteras f tales que

$$\frac{f(z)}{E(z)} \ \ y \ \ \frac{\overline{f(\overline{z})}}{E(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5.2}$$

son de tipo acotado *y de* tipo medio *no positivo sobre el semiplano superior $\mathbb{C}^+$, y*

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}(E)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(x)}{E(x)}\right|^2 dx < \infty. \tag{5.3}$$

A la función E también se le denomina función de estructura del espacio $\mathcal{H}(E)$. Además, es importante observar que su elección no es única, de modo que es posible imponerle ciertas condiciones como por ejemplo, $E(-i) = 0$ y $E(i) > 0$. Al dotar a $\mathcal{H}(E)$ con el producto interno

$$\Big\langle f, g \Big\rangle_{\mathcal{H}(E)} := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\overline{g(x)}}{|E(x)|^2} dx, \tag{5.4}$$

se convierte en un espacio de Hilbert de funciones enteras. Nótese que las condiciones dadas a los cocientes (5.2) se refieren al siguiente hecho: para que una función entera f pertenezca a un espacio de De Branges es fundamental controlar su crecimiento respecto a la función de estructura E en los semiplanos superior $\mathbb{C}^+$ e inferior $\mathbb{C}^-$ del plano complejo.

En adelante adoptaremos la notación $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \mathbb{C}$, para f una función entera. Nótese que son inmediatos los siguientes hechos: f^* es entera y además si f es real en $\mathbb{R}$, entonces $f^* = f$ sobre el eje real y por prolongación analítica sobre todo el plano complejo.

Existe una forma alternativa de definir el espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ usando la clase de funciones de Hardy $H^2(\mathbb{C}^+)$, que como es conocido, consiste en el conjunto de funciones analíticas en $\mathbb{C}^+$ las cuales satisfacen

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{C}^+)} = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

Así, para $E \in HB$, el espacio $\mathcal{H}(E)$ se puede describir de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}(E) = \left\{ f \text{ entera} : \frac{f}{E}, \frac{f^*}{E} \in H^2(\mathbb{C}^+) \right\} \text{ y } \|f\|_{\mathcal{H}(E)} = \left\| \frac{f}{E} \right\|_{H^2(\mathbb{C}^+)}.$$

En resumen, si $E \in HB$ entonces f pertenece al espacio $\mathcal{H}(E)$ si y sólo si es entera, los cocientes (5.2) son de tipo acotado y de tipo medio no positivo y además $\int_{\mathbb{R}} |f(x)E^{-1}(x)|^2 dx < \infty$. Además, si $E \in HB$, el espacio $(\mathcal{H}(E), \langle \cdot, - \rangle_{\mathcal{H}(E)})$, (usando el producto interno definido en (5.4)), es un espacio de De Branges y recíprocamente, todo espacio de se obtiene a partir de E.

Por otra parte, existe una importante relación entre las funciones de la clase *HB* y las funciones interiores (recordemos que una función *f* es interior si *f* pertenece al espacio de Hardy H^∞ y $|f| = 1$ en casi todo punto). Toda función E perteneciente a la clase *HB* define una función interior meromorfa [83], mediante

$$\Theta_E(z) = \frac{E^*(z)}{E(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^+. \tag{5.5}$$

Dada una función interior Θ, si E es una función de la clase *HB* tal que $\Theta = \Theta_E$, entonces E recibe el nombre de *función de De Branges asociada a* Θ. Además, toda función meromorfa interior posee al menos una función de De Branges [20].

Un hecho fundamental dentro de esta teoría es el siguiente: toda función entera E perteneciente a la clase de Hermite-Biehler admite una descomposición genérica en la forma $E(z) = A(z) - iB(z)$ en donde

$$A(z) = \frac{1}{2}\big(E(z) + E^*(z)\big) \quad \text{y} \quad B(z) = \frac{i}{2}\big(E(z) - E^*(z)\big), \quad z \in \mathbb{C},$$

son funciones enteras, reales cuando z es real. Además, los ceros de A y B son reales y están entrelazados (véase [22, p. 842]) y si E es estricta, entonces los ceros son simples. Es importante notar que estas funciones no necesariamente pertenecen al espacio $\mathcal{H}(E)$.

Debido a que E no es única, las funciones A y B se usan para relacionar dos de estas funciones estructura que generen el mismo espacio. Esto último significa que si E_1 y E_2 son dos funciones de la clase *HB* tales que los espacios $(\mathcal{H}(E_1), \langle \cdot, - \rangle_{\mathcal{H}(E_1)})$ y $(\mathcal{H}(E_2), \langle \cdot, - \rangle_{\mathcal{H}(E_2)})$ son isométricos, entonces existe una matriz constante M de orden 2 con entradas reales y determinante 1 tal que

$$(A_2, B_2) = (A_1, B_1)M.$$

Además, existen constantes $a, b > 0$ (véase [9]), tales que,

$$a\big|E_1(z)\big| \leq \big|E_2(z)\big| \leq b\big|E_1(z)\big|, \;\; z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}.$$

El espacio $\mathcal{H}(E)$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Variando ligeramente las dos propiedades dadas en la página 19, las cuales debe cumplir un núcleo reproductor en un RKHS, tenemos:

1. Para todo $\omega \in \mathbb{C}$ fijo, $\kappa(\omega, \cdot) \in \mathcal{H}(E)$.
2. $f(\omega) = \langle f(t), \kappa(\omega, t)\rangle_{\mathcal{H}(E)}$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$ y para toda $f(z) \in \mathcal{H}(E)$.

La condición 1 significa que κ como función de z pertenece a $\mathcal{H}(E)$ para todo número complejo ω. La condición 2 es la propiedad reproductora del espacio; nótese que este producto interior se calcula considerando únicamente valores reales de z, (véase [20, teorema 19] y su prueba). De acuerdo a la notación introducida en la sección 2.3, escribiremos $\kappa(\omega, z) := \kappa_\omega(z)$, para cada $\omega \in \mathbb{C}$ fijo.

En este caso, el núcleo reproductor κ del espacio $\mathcal{H}(E)$ se expresa en términos de la función de estructura E de la siguiente manera:

$$\kappa(\omega, z) = \frac{E(\overline{\omega})E^*(z) - E(z)E^*(\overline{\omega})}{2\pi i(z - \overline{\omega})}, \quad z \neq \overline{\omega}, \tag{5.6}$$

También, es posible dar una definición alternativa del núcleo, en términos de las partes real e imaginaria A y B de E:

$$\kappa(\omega, z) = \frac{\overline{A(\omega)}B(z) - A(z)\overline{B(\omega)}}{\pi(z - \overline{\omega})}, \quad z \neq \overline{\omega}. \tag{5.7}$$

Puesto que el núcleo reproductor es único, descomponiendo la función de estructura E en sus partes real e imaginaria, es fácil ver que las igualdades (5.6) y (5.7) son equivalentes. Es importante resaltar que cuando el espacio de De Branges se determina a partir del núcleo definido por (5.7), entonces es posible elegir la función estructura E con algún grado de libertad; esto significa que para un número real $a > 0$, cualquier función de la forma $E_a(z) = aA(z) - \frac{i}{a}B(z)$ o bien $E_\theta(z) = \mathrm{e}^{i\theta}E(z) = A_\theta(z) - iB_\theta(z)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ nos da el núcleo reproductor [82].

La norma de $\kappa(\omega, z) = \kappa_\omega(z)$, $\omega \in \mathbb{C}$ fijo, se puede calcular como sigue,

$$\big\|\kappa_\omega(z)\big\|_{\mathcal{H}(E)} = \sup\big\{\big|f(\omega)\big| : \big\|f\big\|_{\mathcal{H}(E)} = 1\big\} = \sqrt{\kappa(\omega, \omega)}.$$

Otra fórmula para expresar el núcleo reproductor en un espacio de de Branges, la cual será de utilidad en el capítulo 6 es la siguiente (véase [20, p. 57]),

$$\begin{aligned} 2\pi i(\overline{\omega} - z)\kappa(z, \omega) &= \frac{\pi(\alpha - z)\kappa(z, \overline{\alpha})(\overline{\omega} - \overline{\alpha})\kappa(\overline{\alpha}, \omega)}{\mathrm{Im}(\alpha)\kappa(\overline{\alpha}, \overline{\alpha})} \\ &\quad - \frac{\pi(\overline{\alpha} - \overline{z})\kappa(z, \alpha)(\overline{\omega} - \alpha)\kappa(\alpha, \omega)}{\mathrm{Im}(\alpha)\kappa(\alpha, \alpha)} \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}\,, \mathrm{Im}(\alpha) \neq 0$.

Finalmente, es importante mecionar que otra manera de caracterizar el espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ usando una estimativa para $|f(z)|$ ocurre al aplicar la desigualdad de

Cauchy-Schwarz a la propiedad reproductora. En concreto, en [20, p. 53] se prueba la siguiente propiedad:

Una función entera $f(z)$ pertenece al espacio de Hilbert $\mathcal{H}(E)$ si y solamente si se verifica (5.3) y

$$|f(z)|^2 \le \|f\|^2_{\mathcal{H}(E)}\,\kappa(z,z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Dos observaciones interesantes acerca de la construcción los espacios $\mathcal{H}(E)$ son las siguientes:

- En primer lugar, se ha mencionado reiteradamente que no existe unicidad debido a que a partir de distintas funciones de estructura E se puede obtener el mismo espacio. No obstante, cuando E es estricta (sin ceros en la recta real) esta función se hace única al imponer algunas condiciones adicionales como por ejemplo, que $E(0) = 1$ y que $E'(0)$ tenga valores imaginarios puros.
- El segundo comentario está relacionado con el hecho que si $\mathcal{H}(E)$ es el espacio generado por E tal que $E(t_0) = 0$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces de acuerdo a la ecuación (5.4) toda función f en el espacio hereda este cero. Por lo tanto, es posible hacer estricta la función estructura al dividir entre $z - t_0$ toda función en $\mathcal{H}(E)$ y generar otro espacio $\mathcal{H}(E/(z - t_0))$ preservando el producto interior, en cuyo caso el núcleo reproductor proviene del núcleo de $\mathcal{H}(E)$ dividiendo éste entre $(z - t_0)(\overline{\omega} - t_0)$ (véase [82]).

Para terminar, mencionamos un concepto importante dentro de la teoría de los espacios de De Branges: la denominada *función de fase*. Para la función de estructura $E \in HB$, la *función de fase* asociada a E es una función $\varphi_E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, creciente, tal que $E(t)\mathrm{e}^{i\varphi_E(t)} \in \mathbb{R}$, cuando $t \in \mathbb{R}$ (véase [20, p. 54]).

La función φ_E es única, salvo constantes aditivas en el conjunto $\pi\mathbb{Z}$. Además, es derivable y su derivada es positiva, continua y se calcula explícitamente mediante la fórmula

$$\varphi'_E(t) = \pi\frac{\kappa(t,t)}{|E(t)|^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nótese que al usar la descomposición de E en términos de sus partes real e imaginaria $E(z) = A(z) - iB(z)$, se encuentra mediante un cálculo sencillo que

$$\tan\varphi_E(t) = \frac{B(t)}{A(t)}, \tag{5.9}$$

con lo cual, es evidente que los puntos en donde $\varphi_E(t) \equiv 0 \pmod{\pi}$ son los ceros de $B(z)$ los cuales como se mencionó anteriormente son reales y simples si E es estricta. Del mismo modo, los puntos en donde $\varphi_E(t) \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$ son los ceros de $A(z)$, también reales, y están entrelazados con los ceros de B.

Otra caracterización de los espacios de De Branges

La construcción de una teoría abstracta de los espacios de De Branges surge como consecuencia de la siguiente caracterización (véase [22, p. 840]): un espacio de Hilbert de funciones enteras $(\mathcal{H}, \langle\cdot, -\rangle)$, $\mathcal{H} \neq \{0\}$, es un espacio isométrico a un espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ si se cumplen las siguientes propiedades:

(BS1) Para cada $\omega \in \mathbb{C}$ no real, el funcional lineal de evaluación definido en $\mathcal{H}$, por $f \longmapsto f(\omega)$ es continuo.

(BS2) Si $f \in \mathcal{H}$, la función $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ también pertenece al espacio $\mathcal{H}$ y se cumple que $\|f^*\| = \|f\|$.

(BS3) Si f pertenece a $\mathcal{H}$ y $f(\omega) = 0$, entonces la función $f(z)\dfrac{z - \overline{\omega}}{z - \omega}$ pertenece a $\mathcal{H}$ y

$$\left\langle f(z)\frac{z-\overline{\omega}}{z-\omega}, g(z)\frac{z-\overline{\omega}}{z-\omega}\right\rangle = \left\langle f, g\right\rangle, \quad f, g \in \mathcal{H}\,, \quad g(\omega) = 0.$$

De la condición (BS1) se deduce que $\mathcal{H}$ es un RKHS. La unicidad del núcleo reproductor se sigue del teorema de representación de Riesz.

La relación entre esta caracterización de un espacio de De Branges y la correspondiente a partir de una función de estructura E perteneciente a la clase de Hermite-Biehler está dada de la siguiente manera: en [22, p. 841] se prueba que para todo espacio de Hilbert de funciones enteras que verifique las condiciones (BS1)-(BS3) existe una función entera E la cual satisface la condición (5.1), además, si f es una función entera perteneciente al espacio, entonces

$$\|f\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{f(t)}{E(t)}\right|^2 dt < \infty. \tag{5.10}$$

y adicionalmente se cumple la siguiente estimativa para f

$$\left|f(z)\right|^2 \leq \frac{\|f\|_E^2\Big(|E(z)|^2 - |E(\overline{z})|^2\Big)}{4\pi y}\,, \quad z = x + iy. \tag{5.11}$$

La elección de E se puede hacer de tal manera que coincidan las normas $\|\cdot\|_E$ y la del espacio. Esto significa que todo espacio de Hilbert $\mathcal{H} \neq \{0\}$ de funciones enteras que satisfaga las propiedades (BS1)-(BS3) es isométricamente isomorfo a algún espacio $\mathcal{H}(E)$, con cierto grado de libertad en la elección de la función E.

El recíproco también es cierto, es decir, si $\mathcal{H}(E)$ es un espacio de Hilbert de funciones enteras construido a partir de una función $E \in HB$ que cumple (5.10) y (5.11), entonces, $\mathcal{H}(E)$, verifica el sistema de propiedades (BS1)-(BS3) [22].

Una vez hecha esta breve introducción a los espacios de De Branges, en la siguiente sección presentamos algunas fórmulas de muestreo en tales espacios. Sin embargo, antes de entrar en detalles, presentamos a los espacios de Paley-Wiener como ejemplo clásico de espacios de De Branges.

Ejemplo 5.1. ***(Los espacios de Paley-Wiener*** $PW_{\pi\sigma}$ ***como espacios de De Branges)***

La familia de funciones enteras $E_\sigma(z) = \mathrm{e}^{-i\pi\sigma z}$ para σ un número real positivo está incluida en la clase de Hermite-Biehler. En este caso las funciones componentes son $A_\sigma(z) = \cos(\pi\sigma z)$ y $B_\sigma(z) = \sin(\pi\sigma z)$. El correspondiente espacio de De Branges $\mathcal{H}(E_{\pi\sigma})$ asociado es el espacio de Paley-Wiener $PW_{\pi\sigma}$. Una condición necesaria y suficiente para que una función entera f pertenezca a $\mathcal{H}(E_{\pi\sigma})$ es que esta función pueda escribirse en la forma

$$f(z) = \frac{1}{\pi\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}} g\Big(\frac{t}{\sigma}\Big)\cos\Big(\frac{t}{\sigma}z\Big)dt + \int_{\mathbb{R}} h\Big(\frac{t}{\sigma}\Big)\sin\Big(\frac{t}{\sigma}z\Big)dt\right),$$

donde f y g son funciones en $L^2(0,\pi\sigma)$, complejas para $t \geq 0$ cuyo soporte es $[0,\pi\sigma]$, ([26], [93]). Además, la *función de fase* asociada a $E_\sigma(z) = \mathrm{e}^{-i\pi\sigma z}$ es $\varphi_{E_\sigma}(t) = \pi\sigma t$, para $t \in \mathbb{R}$.

En general, para constantes a, b tales que $0 < a \leq b$, se puede probar que $\mathcal{H}(E_a)$ está contenido isométricamente en $\mathcal{H}(E_b)$ y cada uno de estos espacios está contenido isométricamente en $L^2(\mathbb{R})$.

Para finalizar este ejemplo y con el fin de resaltar la importancia que los espacios de Paley-Wiener tuvieron en el origen y desarrollo de la teoría de los espacios de De Branges, merece la pena hacer un breve comentario al respecto. En el espacio de Paley-Wiener $PW_{\pi\sigma}$, $\sigma > 0$, utilizando a $[K(z)](\omega) = \mathrm{e}^{iz\omega}$ como núcleo de Fourier, si $f \in PW_{\pi\sigma}$ y $\hat{f}$ es su transformada de Fourier en en $L^2(-\pi\sigma,\pi\sigma)$ entonces, sabemos que se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{\sigma}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|f\Big(\frac{n}{\sigma}\Big)\right|^2. \tag{5.12}$$

Sin embargo, en [28, p. 833], Louis de Branges encontró que (5.12) se puede probar sin recurrir a las herramientas del análisis de Fourier. De hecho, esta fórmula es un caso particular de

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{f(t)}{E(t)}\right|^2 dt = \sum_n \frac{\pi}{\varphi_E'(t_n)}\left|\frac{f(t_n)}{E(t_n)}\right|^2, \tag{5.13}$$

donde la suma se hace sobre el conjunto de valores reales t_n, tales que la función de fase φ_E verifica $\varphi_E(t_n) \equiv \alpha \pmod{\pi}$. La igualdad (5.13) es válida para toda f en $\mathcal{H}(E)$ exceptuando a lo más un valor de $\alpha \pmod{\pi}$ [28].

La idea subyacente es la siguiente: al ser la identidad (5.12) válida en el espacio $PW_{\pi\sigma}$, $\sigma > 0$, que como se mencionó anteriormente, visto como espacio de De Branges corresponde a $\mathcal{H}(E_{\pi\sigma})$ para la función de estructura $E(z) = \mathrm{e}^{-i\pi\sigma z}$ con $\sigma > 0$. Al considerar (5.13) válida en un espacio más general $\mathcal{H}(E)$, surgió la idea de encontrar la generalización de la transformada de Fourier asociada a este espacio. tal generalización se encuentra considerando espacios $\mathcal{H}(E_a)$, para constante $a > 0$, contenidos isométricamente en $\mathcal{H}(E)$. Más aún, toda función f en el espacio de Paley-Wiener $PW_{\pi\sigma}$ satisface la desigualdad

$$\big|f(z)\big|^2 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}}\big|f(t)\big|^2 dt\big(\mathrm{e}^{2\pi\sigma y} - \mathrm{e}^{-2\pi\sigma y}\big)}{4\pi y}, \quad z = x + iy. \tag{5.14}$$

en el plano complejo. Recíprocamente, toda función entera la cual satisface (5.14) y pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ está en $PW_{\pi\sigma}$ (véanse [93], [19]). Al resolver el problema de encontrar una caracterización similar para funciones (definidas por transformadas integrales) mas generales que las pertenecientes al espacio $PW_{\pi\sigma}$, $\sigma > 0$, condujo a De Branges al desarrollo teórico de los espacios $\mathcal{H}(E)$; nótese que (5.14) es un caso particular de la desigualdad (5.11).

5.2. Muestreo en espacios de De Branges

En esta sección desarrollamos algunos elementos de muestreo analítico en un espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$; para ello nos preguntamos acerca de la existencia de bases ortogonales en dicho espacio. Ciertamente, tales sistemas existen y se pueden caracterizar en términos del núcleo reproductor κ bajo ciertas restricciones: la ortogonalidad depende de la *función fase* φ_E asociada a E y la completitud depende de que funciones descritas en la forma $\mathrm{e}^{i\alpha}E(z) - \mathrm{e}^{-i\alpha}E^*(z)$ en donde α es un número real o múltiplos constantes de estas no pertenezcan a $\mathcal{H}(E)$.

En concreto se verifica lo siguiente: para cada número real α, consideremos funciones de la forma $\mathrm{e}^{i\alpha}E(z) \in \mathcal{H}(E)$, con descomposición genérica,

$$\mathrm{e}^{i\alpha}E(z) = S_\alpha(z) - iC_\alpha(z),$$

donde,

$$S_\alpha(z) = \frac{i}{2}\big(\mathrm{e}^{i\alpha}E(z) - \mathrm{e}^{-i\alpha}E^*(z)\big) \;\text{ y }\; C_\alpha(z) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{i\alpha}E(z) + \mathrm{e}^{-i\alpha}E^*(z)\big),$$

son funciones enteras tales que $S = S^*$ y $C = C^*$. En [22, lema 7] se prueba que existe a lo sumo un número real α módulo π, tal que $S_\alpha(z)$ pertenece al espacio $\mathcal{H}(E)$.

Por otra parte, nótese que los ceros de $B(z)$ de acuerdo a (5.9) son los valores reales $\{t_n\}$ para los cuales φ_E la *función de fase* asociada a E verifica $\varphi_E(t_n) \equiv 0 \pmod{\pi}$

En general, sea α un número real dado y $\{t_n\}$ una sucesión de números reales tales que $\varphi_E(t_n) \equiv \alpha \pmod{\pi}$. En [20, teorema 22] se prueba el siguiente hecho:

(a) La sucesión

$$\left\{\frac{\kappa(t_n, z)}{\overline{E(t_n)}}\right\} \tag{5.15}$$

es un sistema ortogonal en $\mathcal{H}(E)$.

Sin embargo, respecto a la completitud de (5.15) se tiene el siguiente resultado [20, teorema 22]:

(b) Existe a lo más un número real α módulo π tal que (5.15) no es un sistema completo. En este caso (como se mencionó anteriormente), la función entera $S_\alpha(z)$ pertenece a $\mathcal{H}(E)$ y los múltiplos constantes de $S_\alpha(z)$ son los únicos elementos del espacio $\mathcal{H}(E)$ los cuales son ortogonales a (5.15).

Teniendo en cuenta **(a)** y **(b)**, presentamos en el siguiente teorema una fórmula de muestreo en $\mathcal{H}(E)$ en donde por efectos prácticos modificando ligeramente (5.15), usaremos como base ortogonal en el espacio a la sucesión $\{\kappa(t_n, z)\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 5.1. ***(Muestreo en un espacio de De Branges)***

Sean $\mathcal{H}(E)$, un espacio de De Branges, $\{t_n\}$ una sucesión de números reales tales que $\varphi_E(t_n) = \alpha(mod\ \pi)$ para α un número real dado y $\{\kappa(t_n, \cdot)\}$ una base ortogonal en $\mathcal{H}(E)$. Entonces, toda función f en $\mathcal{H}(E)$ puede ser recuperada a partir de sus muestras $\{f(t_n)\}$ por medio de la serie muestral

$$f(z) = \sum_n f(t_n) \frac{\kappa(t_n, z)}{\kappa(t_n, t_n)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.16}$$

La convergencia de la serie (5.16) es absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea f una función en $\mathcal{H}(E)$. Desarrollando a f respecto a la base ortonormal

$$\left\{ \frac{\kappa(t_n, \cdot)}{\sqrt{\kappa(t_n, t_n)}} \right\} \tag{5.17}$$

de $\mathcal{H}(E)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_n \left\langle f(z), \frac{\kappa(t_n, z)}{\sqrt{\kappa(t_n, t_n)}} \right\rangle_{\mathcal{H}(E)} \frac{\kappa(t_n, z)}{\sqrt{\kappa(t_n, t_n)}} \\ &= \sum_n \frac{1}{\kappa(t_n, t_n)} \langle f(z), \kappa(t_n, z) \rangle_{\mathcal{H}(E)} \kappa(t_n, z) \\ &= \sum_n \frac{1}{\kappa(t_n, t_n)} f(t_n) \kappa(t_n, z) \\ &= \sum_n f(t_n) \frac{\kappa(t_n, z)}{\kappa(t_n, t_n)}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Nótese que se ha usado la propiedad reproductora con $\omega = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ para obtener $f(t_n) = \langle f(z), \kappa(t_n, z)\rangle_{\mathcal{H}(E)}$. La convergencia en norma implica la convergencia uniforme en subconjuntos acotados de $\mathbb{C}$.

□

Obsérvese el siguiente hecho respecto al teorema 5.1: en el caso que el número real α es tal que $S_\alpha(z) \in \mathcal{H}(E)$, es decir, la sucesión $\{\kappa(t_n, \cdot)\}$ no es completa en $\mathcal{H}(E)$, basta considerar el complemento ortogonal del subespacio generado por $S_\alpha(z)$ el cual notaremos $\mathcal{H}_0(E)$. Bajo esta condición, la sucesión $\{\kappa(t_n, \cdot)\}$ es una base de $\mathcal{H}_0(E)$, por lo tanto, el desarrollo (5.18) será válido únicamente en este espacio.

Es importante mencionar que el espacio $\mathcal{H}_0(E)$ también es un espacio de De Branges, véase [23, teorema II].

Una característica que poseen los espacios de De Branges es que en ellos se verifica la propiedad *Zero-removing*. En efecto (véase[20, p. 52]), si la función de estructura E pertenece a la clase *HB* en sentido estricto y $\mathcal{H}(E)$ es el espacio asociado correspondiente, entonces para $f \in \mathcal{H}(E)$ y $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ tal que $f(\omega) = 0$, la función $f(z)/(z-\omega)$ pertenece a $\mathcal{H}(E)$.

Como en el espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ se verifica la propiedad *ZR*, de forma análoga al teorema 4.2, es posible demostrar que la fórmula de muestreo ortogonal (5.16) del teorema 5.1 puede ser escrita como una fórmula interpolatoria tipo-Lagrange.

Teorema 5.2. *Sean $\mathcal{H}(E)$ el espacio de De Branges de funciones enteras con función estructura $E(z)$ estricta y $\{t_n\}$ una sucesión de números reales, bajo las condiciones del teorema 5.1. Entonces, para toda función $f \in \mathcal{H}(E)$, la serie (5.16) puede escribirse como la fórmula interpolatoria tipo-Lagrange*

$$f(z) = \sum_n f(t_n) \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)} \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{5.19}$$

en donde Q es una función entera la cual tiene ceros simples únicamente en $\{t_n\}$ y tal que $(z - t_n)\kappa(t_n, z) = \sigma_n Q(z)$ para ciertas constantes no nulas σ_n. La convergencia de la serie (5.19) es absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Consideremos la función $g_n(z) := \kappa(t_n, z)$. En primer lugar probaremos que los ceros de $g_n(z)$ están dados por la sucesión de números reales $\{t_j\}_{j\neq n}$ y que estos son los únicos ceros. En efecto, usando la propiedad reproductora tenemos,

$$\begin{aligned}\kappa(t_n, t_j) &= \langle \kappa(t_j, z), \kappa(t_n, z)\rangle_{\mathcal{H}(E)} \\ &= \kappa(t_n, t_n)\delta_{n,j}\end{aligned}$$

Sea $\widetilde{t}$ un cero de $g_n(z)$; puesto que en $\mathcal{H}(E)$ se verifica la propiedad *ZR*, entonces $g_n(z)/(t-\widetilde{t}) \in \mathcal{H}(E)$. Del mismo modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$F_n(z) := (t-t_n)\frac{g_n(z)}{t-\widetilde{t}},$$

pertenece a $\mathcal{H}(E)$ debido a que puede escribirse en la forma

$$F_n(z) = g_n(z) + \frac{\tilde{t}-t_n}{t-\widetilde{t}} g_n(z),$$

esto es, como la suma de dos funciones enteras en $\mathcal{H}(E)$. Si $\widetilde{t} \notin \{t_j\}_{j\neq n}$, entonces $F_n(t_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia por la fórmula (5.16) del teorema 5.1 $F_n(z) \equiv 0$ lo que implicaría que $g_n(z) \equiv 0$ (puesto que $(t-t_n)/(t-\widetilde{t})$ no es idénticamente nula), lo cual sería una contradicción. Además, tales ceros son simples ya que en caso de existir algún cero t_m de F_n para cada $n \in \mathbb{N}$, cuya multiplicidad sea mayor a 1, reiterando el argumento anterior a la función $(t-t_n)g_n(z)/(t-t_m)$ la cual pertenece al espacio, llegamos de nuevo a concluir que $g_n(z) \equiv 0$.

Por lo tanto, eligiendo una función entera P con ceros simples en la sucesión $\{t_n\}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función entera $A_n(z)$ sin ceros, tal que

$$(z-t_n)g_n(z) = P(z)A_n(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

A continuación probaremos que existe una función entera sin ceros $A(z)$ y una sucesión α_n en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$ se satisface la igualdad $A_n(z) = \alpha_n A(z)$.

Para tal fin, observemos que al aplicar la fórmula muestral (5.16) a la función en $\mathcal{H}(E)$:

$$G_{n,m}(z) = (z-t_n)\frac{g_n(z)}{z-t_m}$$

con ceros en $\{t_j\}_{j\neq m}$ y $m \neq n$, llegamos a:

$$G_{n,m}(t_n) = 0\,,\ m \neq n,$$

o bien,

$$G_{n,m}(t_m) = \lim_{z\to t_m} \frac{z-t_n}{z-t_m} g_n(z) = (t_m-t_n)g_n'(t_m),$$

con lo cual,

$$G_{n,m}(z) = (t_m-t_n)g_n'(t_m)\frac{g_m(z)}{\kappa(t_m,t_m)}.$$

Para el valor particular $m = 1$ se obtiene,

$$G_{n,1}(z) = (z-t_n)\frac{g_n(z)}{z-t_1} = (t_1-t_n)g_n'(t_1)\frac{g_1(z)}{\kappa(t_1,t_1)}.$$

Entonces, considerando la sucesión $\alpha_n = (t_1 - t_n)g_n'(t_1)/\kappa(t_1, t_1)$ para todo natural $n \neq 1$, $\alpha_1 = 1$ si $n = 1$ y $A = A_1$, concluimos que $A_n(z) = \alpha_n A_1$.

En consecuencia, definimos $Q(z) := P(z)A(z)$ y haciendo

$$\kappa(t_n, z) = \frac{\alpha_n Q(z)}{z - t_n},$$

para $z \neq t_n$, y

$$\kappa(t_n, t_n) = \lim_{z \to t_n} \frac{\alpha_n Q(z)}{z - t_n} = \alpha_n Q'(t_n),$$

al sustituir en (5.16) se llega a la fórmula interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$\square$

Ejemplo 5.2. *(Espacios de De Branges asociados a la ecuación de Bessel: Fórmulas de muestreo asociadas)*

Presentamos a continuación un ejemplo que exhibe una fórmula de muestreo en espacios de De Branges los cuales se obtienen usando como funciones de estructura algunas funciones de De Branges dadas explícitamente. Esto se hace dentro de la teoría de operadores diferenciales autoadjuntos de segundo orden con resolvente compacta. Usando la igualdad (5.5), tales funciones denotadas E_ν surgen a partir de las funciones interiores de Bessel; en particular, tomando para cada $\nu \geq 1/2$ a la función interior de Weyl Θ_ν [86]. Los espacios $\mathcal{H}(E_\nu)$ y las fórmulas de muestreo que se derivan (particularmente en el espacio $\mathcal{H}(E_{1/2})$), surgen dentro de un problema de frontera relacionado con la ecuación diferencial de Bessel y en ese contexto, se utilizan además la funciones de Weyl-Titchmarsh asociadas al mismo.

En concreto, consideremos para $\nu \geq 1/2$ la ecuación diferencial de Bessel de segundo orden:

$$-u'' + \left(\frac{\nu^2 - 1/4}{t^2}\right) u = zu, \quad 0 < t < 1, \tag{5.20}$$

en donde el potencial está dado por

$$q(t) = \frac{\nu^2 - 1/4}{t^2} \text{ en } (0, 1),$$

y la condición de frontera $u(0) = 0$, la cual verifica la función

$$u_z(t) = \sqrt{t} J_\nu(t\sqrt{z}),$$

la cual es solución de (5.20). En esas condiciones, la función $m(z)$ de Weyl-Tichmarsh está dada por la expresión [86],

$$m(z) = -\frac{u_z'(1)}{u_z(1)} = \frac{(\frac{1}{2})J_\nu(\sqrt{z}) + \sqrt{z}J_\nu'(\sqrt{z})}{J_\nu(\sqrt{z})}. \tag{5.21}$$

Además, como m es una función de Herglotz, es posible definir la correspondiente función interior de Weyl (véase [86, p. 193]), $\Theta_\nu(z)$:

$$\Theta_\nu(z) = \frac{\sqrt{z}J_\nu'(\sqrt{z}) + (\frac{1}{2}+i)J_\nu(\sqrt{z})}{\sqrt{z}J_\nu'(\sqrt{z}) + (\frac{1}{2}-i)J_\nu(\sqrt{z})}. \tag{5.22}$$

Ahora bien, para encontrar la función de De Branges E_ν de Θ_ν, usamos un hecho muy conocido de la teoría general de las funciones de Bessel; esto es, existe una función real entera par $G_\nu(z)$ tal que

$$J_\nu(z) = z^\nu G_\nu(z),$$

donde $G_\nu(0) \neq 0$. Consideremos la función $F_\nu(z) = zG_\nu'(z)$ la cual es real, entera y par. Puesto que

$$zJ_\nu'(z) = z^\nu(\nu G_\nu + F_\nu),$$

la ecuación (5.22) se puede escribir en la forma

$$\Theta_\nu(z) = \frac{F_\nu(\sqrt{z}) + (\frac{1}{2}+\nu+i)G_\nu(\sqrt{z})}{F_\nu(\sqrt{z}) + (\frac{1}{2}+\nu-i)G_\nu(\sqrt{z})}. \tag{5.23}$$

En consecuencia, tomamos como función de De Branges de Θ_ν para cada $\nu \geq 1/2$, a

$$E_\nu(z) := F_\nu(\sqrt{z}) + \Big(\frac{1}{2}+\nu-i\Big)G_\nu(\sqrt{z}) \tag{5.24}$$

la cual no se anula en $z=0$ y por lo tanto, tampoco tiene ceros reales. Esto último es cierto puesto que si existiera $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $E_\nu(t) = 0$ entonces,

$$G_\nu(t) = F_\nu(t) = 0$$

lo que implica, $J_\nu(t) = J_\nu'(t) = 0$.

En el caso particular $\nu = 1/2$ se tiene $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$, con lo cual,

$$G_{1/2}(z) = z^{-1/2}J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin z}{z}$$

y

$$F_{1/2}(z) = zG'_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z\cos z - \sin z}{z}$$

El espacio de de Branges correspondiente es $\mathcal{H}(E_{1/2})$. La descomposición genérica de la función de De Branges $E_{1/2}(z) = A_{1/2}(z) - iB_{1/2}(z)$ en (5.24), indica que,

$$A_{1/2}(z) = F_{1/2}(\sqrt{z}) + G_{1/2}(\sqrt{z}); \quad B_{1/2}(z) = G_{1/2}(\sqrt{z}).$$

La *función de fase* asociada a $E_{1/2}(z)$ es

$$\varphi_{E_{1/2}}(x) = \arctan \frac{G_{1/2}(\sqrt{x})}{F_{1/2}(\sqrt{x}) + G_{1/2}(\sqrt{x})}. \tag{5.25}$$

A continuación presentamos algunas fórmulas de muestreo en $\mathcal{H}(E_{1/2})$. De acuerdo al contenido teórico desarrollado en la sección 5.2, tenemos lo siguiente: sea α un número real dado y $\{t_n^\alpha\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales tales que la *función de fase* dada en (5.25) verifica $\varphi(t_n^\alpha) = \alpha \pmod \pi$. Entonces, la sucesión $\{\kappa(t_n^\alpha, z)\}$ será una base ortogonal para $\mathcal{H}(E_{1/2})$ si y solamente si la función $\mathrm{e}^{i\alpha}E_{1/2}(z) - \mathrm{e}^{-i\alpha}E_{1/2}^*$ no pertenece a $\mathcal{H}(E_{1/2})$.

Esto ocurre por ejemplo si $\alpha \in \{0, \pi/2\}$. Si $\alpha = 0$, entonces por (5.25), $B_{1/2}(t_n^0) = 0$; del mismo modo, si $\alpha = \pi/2$, se cumple $A_{1/2}(t_n^{1/2}) = 0$. Veamos en lo que sigue, el análisis detallado para cada uno de estos valores de α justificando la existencia de la base ortogonal correspondiente y en consecuencia la obtención de una serie muestral que ilustre las fórmulas (5.16) del teorema 5.1 y (5.19) del teorema 5.2.

a) $\alpha = 0$.

En este caso, $\mathrm{e}^{i\alpha}E_{1/2}(z) - \mathrm{e}^{-i\alpha}E_{1/2}^* = 2iB_{1/2}(z)$. Por lo tanto, veamos que $B_{1/2}(z) \notin \mathcal{H}(E_{1/2})$. Para tal fin basta ver que $B_{1/2}(x)/E_{1/2}(x) \notin L^2(\mathbb{R})$. En efecto, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{B_{1/2}(x)}{E_{1/2}(x)} \right|^2 = \frac{B_{1/2}^2(x)}{A_{1/2}^2(x) + B_{1/2}^2(x)} = \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{x \cos^2 \sqrt{x} + \sin^2 \sqrt{x}} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

Además, como $B_{1/2}(t_n^0) = G_{1/2}(\sqrt{t_n^0}) = 0$, entonces, $t_n^0 = n^2\pi^2$ para $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, toda función f en $\mathcal{H}(E_{1/2})$ puede ser recuperada mediante la fórmula muestral

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n^2\pi^2) \frac{\kappa(n^2\pi^2, z)}{\kappa(n^2\pi^2, n^2\pi^2)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{5.26}$$

donde, de acuerdo a la fórmula (5.16), teniendo en cuenta la base ortonormal (5.17),

$$\frac{\kappa(n^2\pi^2, z)}{\kappa(n^2\pi^2, n^2\pi^2)} = \frac{2(-1)^n n^2\pi^2 \sin \sqrt{z}}{(z - n^2\pi^2)\sqrt{z}}.$$

Aplicando el teorema 5.2, la ecuación (5.26) puede ser escrita como la serie interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2\pi^2)\frac{Q(z)}{(z-n^2\pi^2)Q'(n^2\pi^2)}, \qquad z\in\mathbb{C},$$

con $Q(z)=\sin\sqrt{z}/\sqrt{z}$, $z\in\mathbb{C}$.

b) $\alpha=\frac{\pi}{2}$.
Puesto que $\mathrm{e}^{i\alpha}E_{1/2}(z)-\mathrm{e}^{-i\alpha}E^*_{1/2}=i(E_{1/2}(z)+E^*_{1/2})=2iA_{1/2}(z)$, veamos que $A_{1/2}(z)\notin\mathcal{H}(E_{1/2})$. Para tal fin, análogamente al caso anterior, basta comprobar que $A_{1/2}(x)/E_{1/2}(x)\notin L^2(\mathbb{R})$. En efecto, si $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{A_{1/2}(x)}{E_{1/2}(x)}\right|^2=\frac{A^2_{1/2}(x)}{A^2_{1/2}(x)+B^2_{1/2}(x)}=\frac{x\cos^2\sqrt{x}}{x\cos^2\sqrt{x}+\sin^2\sqrt{x}}\notin L^1(\mathbb{R}).$$

Además, como

$$A_{1/2}(t_n^{\pi/2})=F_{1/2}\Big(\sqrt{t_n^{\pi/2}}+G_{1/2}(\sqrt{t_n^{\pi/2}}\Big)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\sqrt{t_n^{\pi/2}}=0,$$

entonces, la sucesión de puntos muestrales está caracterizada mediante la igualdad $t_n^{\pi/2}=(2n-1)^2\pi^2/4$ para $n\in\mathbb{N}$; con lo cual, toda función f en $\mathcal{H}(E_{1/2})$ puede ser recuperada mediante la fórmula de muestreo

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f\Big((2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\Big)\frac{\kappa\Big((2n-1)^2\frac{\pi^2}{4},z\Big)}{\kappa\Big((2n-1)^2\frac{\pi^2}{4},(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\Big)},\ z\in\mathbb{C}. \quad (5.27)$$

Usando una vez más el teorema 5.2, la fórmula (5.27) puede ser escrita como la serie interpolatoria tipo-Lagrange

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f\Big((2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\Big)\frac{Q(z)}{\Big(z-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\Big)Q'\Big((2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\Big)}, \qquad z\in\mathbb{C},$$

con $Q(z)=\cos\sqrt{z}$, $z\in\mathbb{C}$.

5.3. Los espacios $\mathcal{H}_K$ como espacios de De Branges

En esta sección estamos interesados en relacionar los espacios $\mathcal{H}_K$ construidos en la sección 2.1 y los espacios de De Branges. En concreto nos preguntamos acerca de la existencia de condiciones bajo las cuales todo espacio $\mathcal{H}(E)$ pueda ser visto como un RKHS $\mathcal{H}_K$ donde K es un núcleo analítico de Kramer y viceversa. En el primer caso, el corolario 5.2 proporciona una respuesta. Sin embargo, el problema recíproco, es decir, cuándo un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $\mathcal{H}_K$ proveniente de un núcleo analítico de Kramer K es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges es en general difícil. Dado $\mathcal{H}$ un RKHS de funciones enteras arbitrario, en el próximo apartado se caracteriza como un espacio de De Branges. Posteriormente, nos ocupamos de hacer lo mismo para los espacios $\mathcal{H}_K$ utilizando las fórmulas interpolatorias tipo Lagrange que aparecieron en la teoría de muestreo del capítulo 4.

Una nueva caracterización de los espacios de De Branges

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (el cual denotaremos por κ) de funciones enteras. La caracterización de éste como espacio de De Branges se presenta en el teorema 5.3 en el cual se da como condición necesaria y suficiente, el poder establecer una inmersión isométrica entre $\mathcal{H}$ y $L^2(\mu)$ – donde μ es una medida positiva sobre $\mathbb{R}$ – siempre y cuando esta medida satisfaga una propiedad de aproximación que llamaremos condición *CA*. En la prueba del teorema se usarán dos argumentos: el primero, proviene de la sección 5.1 donde se mencionó que una condición necesaria y suficiente para que todo espacio de Hilbert de funciones enteras sea isométricamente isomorfo a algún espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ es que en dicho espacio se verifiquen las condiciones (BS1)-(BS3) (véanse [22, p. 841] o [20, teorema 23]). El segundo, dado en el lema 5.1 a continuación, hace uso de una ligera pero importante modificación de la propiedad 6 (Criterio de pertenencia a un RKHS) la cual aparece al final de la sección 2.3. En dicha modificación se usa como hipótesis que el dominio de las funciones del espacio $\mathcal{H}$ es un conjunto de unicidad del mismo; esto, como es bien conocido, significa que si dos funciones coinciden sobre todo elemento del dominio, entonces son idénticamente iguales.

Lema 5.1. *Supongamos que Ω es un conjunto de unicidad de $\mathcal{H}$. Una función compleja f pertenece a $\mathcal{H}$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left|\sum_{i=0}^{N} f(z_i)\lambda_i\right|^2 \leq C^2 \sum_{i,j=0}^{N} \kappa(z_i, z_j)\lambda_i\overline{\lambda_j}, \tag{5.28}$$

para todo par de subconjuntos finitos $\{z_0, z_2, \cdots, z_N\}$ en Ω y $\{\lambda_0, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}$ en $\mathbb{C}$.

Demostración. Aunque no daremos todos los detalles, mencionaremos las dos ideas fundamentales de la prueba:

- Debido a la desigualdad (5.28), la aplicación

$$\Phi : \sum_{i=0}^{N} f(z_i)\lambda_i \to \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \kappa_{z_i}$$

define un operador lineal acotado sobre la clausura del conjunto $\{\kappa_z : \ z \in \mathbb{C}\}$; esto es, el subespacio generado por κ_z para cada $z \in \Omega$. Φ se extiende asignándole el valor cero sobre el complemento ortogonal de este dominio.

- En consecuencia, recurriendo al teorema de representación de Riesz, existe un elemento $\tilde{f} \in \mathcal{H}$ el cual de acuerdo a la propiedad reproductora coincide con f en Ω. Por lo tanto, puesto que Ω es un conjunto de unicidad de $\mathcal{H}$, $f \equiv \tilde{f}$.

□

Para $\omega \in \mathbb{C}$, denotamos por $\mathcal{H}_\omega$ al conjunto $\mathcal{H}_\omega := \big\{f \in \mathcal{H} : \ \ f(\omega) = 0\big\}$. Además, para $f \in \mathcal{H}_\omega$ definimos la función

$$f_\omega(z) := \frac{z - \overline{\omega}}{z - \omega} f(z). \tag{5.29}$$

Con lo cual, están dadas las condiciones para formular el siguiente resultado:

Teorema 5.3. *Un RKHS de funciones enteras $\mathcal{H}$ es un espacio de De Branges si y sólo si está isométricamente inmerso en $L^2(\mu)$ donde μ es una medida positiva en $\mathbb{R}$ y se cumple la siguiente condición de aproximación:*

(CA) *Para cada $\omega \in \mathbb{C}$, para toda f en $\mathcal{H}_\omega$ y todo subconjunto finito $A \subseteq \mathbb{C}$ existe una sucesión de funciones enteras $\{f_{A,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tal que*

$$f_{A,n}(z) \longrightarrow f_\omega(z)\,, \ \ z \in A.$$

Además, $\|f_{A,n}\|_{L^2(\mu)} < M$, ($M$ depende exclusivamente de f) y $\mathcal{H}$ es simétrico respecto a la involución $f \longmapsto f^*$.

Demostración. En primer lugar probaremos que $\mathcal{H}$ es un espacio de De Branges; para ello, veamos que se cumplen las condiciones (BS1)-(BS3). Por hipótesis $\mathcal{H}$ es un RKHS de funciones enteras, por lo tanto, la condición (BS1) es inmediata. Para probar (BS3) supongamos que $f \in \mathcal{H}_\omega$, queremos probar que $f_\omega \in \mathcal{H}$ y que se tiene la igualdad de las normas: $\|f_\omega\| = \|f\|$. Para tal efecto, consideremos el conjunto finito de puntos $A := \{z_i\}_{i=1}^N \subset \Omega$, donde $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ y la sucesión $\{\lambda_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{C}$. Sean $\{f_{A,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones de la condición *CA* y dado $\epsilon > 0$,

$$\left|\sum_{i=0}^{N} \lambda_i (f_\omega(z_i) - f_{A,n}(z_i))\right| < \epsilon$$

para n suficientemente grande ya que el conjunto A es finito. Aplicando la propiedad reproductora tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{N}\lambda_i f_\omega(z_i)\right| &\leq \left|\sum_{i=0}^{N}\lambda_i f_{A,n}(z_i)\right| + \left|\sum_{i=0}^{N}\lambda_i (f_\omega(z_i) - f_{A,n}(z_i))\right| \\
&\leq \left|\left\langle f_{A,n}, \sum_i \lambda_i \kappa_{z_i}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| + \epsilon \\
&\leq \|f_{A,n}\|_{L^2(\mu)} \left\|\sum_i \lambda_i \kappa_{z_i}\right\|_{L^2(\mu)} + \epsilon \\
&\leq M\left\|\sum_i \lambda_i \kappa_{z_i}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon \\
&= M\sqrt{\sum_{i,j=0}^{N}\lambda_i\overline{\lambda_j}\kappa(z_i, z_j)} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, se obtiene la desigualdad (5.28) y puesto que Ω es un conjunto de unicidad para $\mathcal{H}$, aplicando el lema 5.1, se concluye que $f_\omega \in \mathcal{H}$.

Probaremos ahora que $\|f_\omega\| = \|f\|$. Usando (5.29) tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\omega(t)|^2\, d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{t-\overline{\omega}}{t-\omega} f(t)\right|^2 d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu(t) \tag{5.30}$$

ya que si t es real, $|t-\overline{\omega}| = |t-\omega|$. En particular, se concluye que $f_\omega \in L^2(\mu)$.

Finalmente, veamos que se verifica la propiedad (BS2). La involución $f \longrightarrow f^*$ es una isometría en $L^2(\mu)$ y puesto que $\mathcal{H}$ es simétrico respecto a esta involución, entonces, $f^* \in \mathcal{H}$ y $\|f^*\| = \|f\|$; luego, $\mathcal{H}$ es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges.

El recíproco es inmediato.

□

A continuación se ilustra el teorema 5.3. Se construye un espacio de Hilbert a partir de un núcleo polinomial definido mediante una sucesión de polinomios ortogonales reales.

Ejemplo 5.3.

Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios reales ortogonales con respecto a una medida μ, solución de un problema indeterminado de momentos. Entonces [105, teorema 10.33], el núcleo

$$\kappa(z,\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)\overline{p_n(\omega)}\,, \quad z \in \mathbb{C},$$

está bien definido. Definiendo un truncamiento finito del núcleo,

$$\kappa_N(z,\omega) := \sum_{n=0}^{N} p_n(z)\overline{p_n(\omega)}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \kappa_N(z,t)\overline{\kappa_N(\omega,t)}d\mu(t) &= \sum_{m,n=0}^{N} p_m(z)\overline{p_n(\omega)}\int_{\mathbb{R}}\overline{p_m(t)}p_n(t)d\mu(t)\\ &= \sum_{n=0}^{N} p_n(z)\overline{p_n(\omega)} = \kappa_N(z,\omega).\end{aligned}$$

Por lo tanto, ([96], teorema 1.38) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \kappa(z,t)\overline{\kappa(\omega,t)}d\mu(t) &= \lim_{N\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \kappa_N(z,t)\overline{\kappa_N(\omega,t)}d\mu(t)\\ &= \kappa(z,\omega) = \Big\langle \kappa(\cdot,\omega),\kappa(\cdot,z)\Big\rangle.\end{aligned}$$

En consecuencia, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ proveniente del núcleo reproductor κ queda isométricamente inmerso en $L^2(\mu)$ y como los polinomios $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ tienen coeficientes reales, entonces, $\mathcal{H}$ es simétrico respecto a la involución $f \longrightarrow f^*$.

Además, los polinomios $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ forman una base ortonormal en $\mathcal{H}$ (véase [108, p. 4]), con lo cual, todos los polinomios están en $\mathcal{H}$. Del mismo modo, dado que el espacio $\mathcal{H}_\omega$ es cerrado en $\mathcal{H}$, entonces para toda $f \in \mathcal{H}_\omega$ existe una sucesión de polinomios $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_\omega$ que convergen a f en la norma de $\mathcal{H}$, para los cuales

$$\|r_n\|_{L^2(\mu)} = \|r_n\|_{\mathcal{H}} \leq a\,\|f\|_{\mathcal{H}},$$

donde a es una constante positiva.

Por lo tanto, la sucesión $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ cumple el mismo papel que la sucesión $\{f_{A,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la condición de aproximación *CA*; y, puesto que los polinomios $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ están en $\mathcal{H}_\omega$, entonces $\{r_{n,\omega}\}_{n=0}^{\infty}$ constituye la clase de polinomios que de acuerdo con (5.30) tienen la misma norma que los polinomios $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$. Con lo cual, como consecuencia del teorema 5.3 concluimos lo siguiente:

Corolario 5.1. *El espacio $\mathcal{H}$ proveniente del núcleo $\kappa(z,\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)\overline{p_n(\omega)}$, $z \in \mathbb{C}$, construido en el ejemplo 5.3 es un espacio de De Branges.*

Análogamente, es posible usar – para construir el núcleo reproductor κ - una sucesión de polinomios de segunda clase y con base en este núcleo, construir un espacio de Hilbert como el del ejemplo 5.3 y del mismo modo caracterizarlo como un espacio de De Branges.

Nótese que como consecuencia del corolario 5.1, los espacios $\mathcal{H}_K$

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\}.$$

y

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(z), \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}.$$

del ejemplo 3.4 son espacios de De Branges.

Caracterización de los espacios $\mathcal{H}_K$ como espacios de De Branges

Como se anunció al comienzo de la sección, en este apartado estudiaremos las condiciones que permitan caracterizar al espacio $\mathcal{H}_K$ como un espacio de De Branges, pero, – teniendo en cuenta nuestros intereses y objetivos – lo haremos desde la perspectiva de la teoría de muestreo. En concreto tenemos los siguientes hechos: siempre que un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $\mathcal{H}_K$, proveniente de un núcleo analítico de Kramer sea isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ ($E(z)$ en sentido estricto), entonces, en tal espacio se satisface la propiedad *ZR* y consecuentemente es posible escribir la fórmula de muestreo (3.5) como una serie interpolatoria tipo-Lagrange (4.4). Hay una versión de la implicación recíproca la cual tiene validez cuando la sucesión de puntos muestrales $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es real y la función $Q(z)$ también, con $z \in \mathbb{R}$, como se enuncia en el siguiente teorema, [52]:

Teorema 5.4. *Sea $\mathcal{H}_K$ el RKHS proveniente del núcleo analítico K el cual es de Kramer respecto de la sucesión de números reales $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea Q una función entera con ceros simples únicamente en $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $Q^*(z) = \overline{Q(\overline{z})} = Q(z)$ para $z \in \mathbb{C}$. Además, supongamos que la fórmula de muestreo (3.5) puede ser escrita como una serie interpolatoria tipo-Lagrange (4.4) para la función Q. Entonces, el espacio $\mathcal{H}_K$ es un espacio de De Branges.*

Demostración. Probaremos que el espacio $\mathcal{H}_K$ satisface las propiedades (BS1)-(BS3), descritas en la página 94. La propiedad (BS1) es inmediata porque $\mathcal{H}_K$ es un RKHS. Para demostrar (BS2), consideremos $f \in \mathcal{H}_K$ tal que

$$f(z) = \Big\langle K(z), x \Big\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5.31}$$

para cierto $x \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$f^*(z) = \overline{\Big\langle K(\overline{z}), x \Big\rangle_{\mathbb{H}}} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^*(z) \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5.32}$$

donde $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la base ortonormal tal que $K(t_n) = a_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. En este caso, las funciones muestrales (2.22) están dadas por $S_n(z) = \langle K(z), e_n \rangle_{\mathcal{H}}$, $n \in \mathbb{N}$, porque $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ coincide con su base dual. Utilizando (5.31), encontramos:

$$f^*(t_n) = \overline{\left\langle K(\overline{t_n}), x \right\rangle_{\mathcal{H}}} = \overline{\langle a_n e_n, x \rangle_{\mathcal{H}}} = \overline{a}_n \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Además, puesto que la fórmula (4.4) permite considerar

$$S_n(z) = a_n \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)}\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

y por hipótesis $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $Q^* = Q$ entonces,

$$S_n^*(z) = \overline{a}_n \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia obtenemos la fórmula de muestreo

$$f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f^*(t_n) \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)} \qquad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.33}$$

Por otra parte, tomemos un elemento $y \in \mathcal{H}$ cuyos coeficientes de Fourier con respecto a la base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sean

$$\langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{a_n}{\overline{a}_n} \overline{\langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La función $g(z) := \left\langle K(z), y \right\rangle_{\mathcal{H}}$, $z \in \mathbb{C}$ en el espacio $\mathcal{H}_K$ verifica que

$$g(t_n) = a_n \overline{\langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}} = \overline{a}_n \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = f^*(t_n)\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, de acuerdo a la serie (5.33) concluimos que $f^* = g$ y por lo tanto, $f^* \in \mathcal{H}_K$. Nótese que la igualdad de las normas de f y f^* es inmediata. En efecto,

$$\|f^*\|^2_{\mathcal{H}_K} = \|y\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 = \|x\|^2_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}_K}\,.$$

Finalmente probaremos que en $\mathcal{H}_K$ se satisface la propiedad (BS3). Para tal efecto, consideremos de nuevo una función $f \in \mathcal{H}_K$ definida en la forma $f(z) = \left\langle K(z), x \right\rangle_{\mathcal{H}}$, $z \in \mathbb{C}$, para cierto $x \in \mathcal{H}$ y tal que $f(\omega) = 0$ con $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Puesto que $Q(\omega) \neq 0$, la serie interpolatoria tipo-Lagrange (4.4) para f proporciona

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(t_n)}{(\omega - t_n)Q'(t_n)} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)} - \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{Q(z)}{(\omega - t_n)Q'(t_n)} \\ &= (\omega - z) \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{Q(z)}{Q'(t_n)} \frac{1}{(z - t_n)(\omega - t_n)}, \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos,

$$\frac{f(z)}{z - \omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(t_n)}{(t_n - \omega)} \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Además, dado que

$$\frac{z - \overline{\omega}}{z - \omega} f(z) = f(z) + (\omega - \overline{\omega}) \frac{f(z)}{z - \omega},$$

la función $[(z-\overline{\omega})/(z - \omega)]f(z)$ pertenecerá al espacio $\mathcal{H}_K$ si y solamente si la función $f(z)/(z - \omega)$ también pertenece a $\mathcal{H}_K$; pero esto se sigue del teorema 4.2. Razonando del mismo modo que en la prueba de dicho teorema, la función $g \in \mathcal{H}_K$ definida por $g(z) := \left\langle K(z), y \right\rangle_{\mathcal{H}}$, $z \in \mathbb{C}$, donde $y \in \mathcal{H}$ tiene coeficientes de Fourier en $\ell^2(\mathbb{N})$ con respecto a la base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\left\{ \langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}} := \frac{1}{t_n - \overline{\omega}} \langle x, e_n \rangle \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

coincide con la función entera $f(z)/(z - \omega)$.

Finalmente, se verifica la igualdad de las normas:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z - \overline{\omega}}{z - \omega} f(z) \right\|^2 &= \|f + (\omega - \overline{\omega})g\|^2_{\mathcal{H}_K} = \|x + (\overline{\omega} - \omega)y\|^2_{\mathcal{H}} \qquad (5.34) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x + (\overline{\omega} - \omega)y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{t_n - \omega}{t_n - \overline{\omega}} \right|^2 |\langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \|x\|^2_{\mathcal{H}} = \|f\|^2_{\mathcal{H}_K} \end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{T}_K(x + (\omega - \overline{\omega})y) = \mathcal{T}_K(x) + (\overline{\omega} - \omega)\mathcal{T}_K(y) = f + (\overline{\omega} - \omega)g$ y puesto que $\mathcal{T}_K$ es una isometría, se tiene la igualdad de las normas en (5.34), con lo cual concluye la prueba. □

una consecuencia del teorema 5.4, es que para todo espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ es posible encontrar explícitamente un núcleo analítico de Kramer K, tal que $\mathcal{H}(E)$ sea isométricamente isomorfo al RKHS $\mathcal{H}_K$. Esto se prueba en el siguiente corolario:

Corolario 5.2. *(**El espacio de De Branges** $\mathcal{H}(E)$ **como espacio** $\mathcal{H}_K$)*

Un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $\mathcal{H}_K$ es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ si y solamente si existe una fórmula de muestreo ortogonal en $\mathcal{H}_K$ la cual se puede escribir como una serie interpolatoria tipo-Lagrange; esto es, para cada $f \in \mathcal{H}_K$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{Q(z)}{(z - t_n)Q'(t_n)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y $Q^*(z) = Q(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. De acuerdo al teorema 5.4, para completar la caracterización, únicamente basta identificar al espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ con el espacio $\mathcal{H}_K$, encontrando el núcleo analítico de Kramer $K(z)$. Para tal efecto, si $f \in \mathcal{H}(E)$, utilizando la propiedad reproductora tenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \langle f(\omega), \kappa(z, \omega) \rangle_{\mathcal{H}(E)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\overline{\kappa(z,t)}}{|E(t)|^2} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{|E(t)|^2} \overline{\left(\frac{\overline{A(z)}B(t) - A(t)\overline{B(z)}}{\pi(t - \overline{z})} \right)} dt \\ &= \left\langle K(z), \overline{f(\overline{z})} \right\rangle_{\mathcal{H}(E)}, \end{aligned}$$

donde el núcleo analítico de Kramer $K(z)$ está dado por

$$[K(z)](\omega) = \frac{A(z)B(\omega) - B(z)A(\omega)}{\pi(\omega - z)}.$$

Nótese además que $f^*(z)$ y $K(z)$, $z \in \mathbb{C}$, pertenecen a $\mathcal{H}(E)$.

□

Los resultados obtenidos en el teorema 5.4 y en el corolario 5.2 merecen dos comentarios finales:

- Por un lado, nótese que las herramientas teóricas formuladas dentro de la teoría de espacios de De Branges para caracterizar los mismos (véanse [22, p. 841] o [20, , teorema 23]) permiten hacer lo propio con el RKHS $\mathcal{H}_K$ sin recurrir al operador antilineal $\mathcal{T}_K$ asociado al núcleo K, definido en la sección 2.1 y a partir del cual se construyó este espacio.

- La segunda observación se refiere a que el núcleo analítico de Kramer descrito en el corolario 5.2 no es único. Por ejemplo, para el espacio $\mathcal{H}(E_{1/2})$ descrito en el ejemplo 5.2 consideremos el núcleo

  $$[K(z)]\,(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,, \quad 0 < t < 1\,, \quad z \in \mathbb{C}.$$

  Para todo $z \in \mathbb{C}$, la función $K(z)$ pertenece a $L^2[0,1]$ y la aplicación

  $$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^2[0,1] \\ & z & \longmapsto & K(z) \end{array}$$

  es analítica. Además la aplicación antilineal

  $$L^2[0,1] \longrightarrow \mathcal{H}(E_{1/2})\,, \quad f \longmapsto \int_0^1 [K(z)](t)f(t)dt$$

  es una isometría (véase [86]).

Ejemplo 5.4.

Consideremos una vez mas el espacio de Hilbert

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_K &= \big\{f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \mid \ f(z) = \big\langle P_n(z), c_n \big\rangle, \ \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)\big\}. \\ &= \left\{f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \mid \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)\right\}\end{aligned}$$

descrito en el ejemplo 3.4 (p. 50), donde $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales asociados a un problema de momentos indeterminado de Hamburger.

Por el teorema de muestreo 4.3 probado en la página 78, toda función $f \in \mathcal{H}_K$ puede ser desarrollada mediante la serie interpolatoria tipo-Lagrange (4.15)

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(z_m^t)\frac{G_t(z)}{(z - z_m^t)G_t'(z_m^t)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

En este caso, los puntos de muestreo $\{t_n\}$ son reales y están dados por el conjunto de ceros $\{z_n^t\}_{n=0}^{\infty}$ de la función G_t definida en dicho teorema, en términos de las funciones de Nevanlinna. Para aplicar el corolario 5.2, hacemos $G_t(z) = Q(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Además, se observa que $Q^* = Q$, por lo tanto, concluimos que $\mathcal{H}_K$ es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges.

Ejemplo 5.5.

Análogamente al ejemplo anterior, consideremos el RKHS

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \mid f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(z), \quad \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\},$$

proveniente del núcleo discreto $[K(z)](n) = Q_n(z),\ n \in \mathbb{N}$ (descrito igualmente en el ejemplo 3.4), donde $\{Q_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales de segunda clase relacionada con los polinomios $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ y con $\{\widetilde{P}_n\}$ (polinomios ortogonales de primera clase asociados al *problema de momentos desplazado*).

En el corolario 4.1 (p. 80), se probó que toda función $f \in \mathcal{H}_K$ puede ser desarrollada mediante la serie interpolatoria tipo-Lagrange (4.19)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\omega_m^t) \frac{G_t(z)}{(z - \omega_m^t) G_t'(\omega_m^t)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Del mismo modo, los puntos de muestreo $\{t_n\}$ son reales y en este caso están dados por el conjunto de ceros $\{\omega_n^t\}_{n=1}^{\infty}$ de la función G_t la cual depende de las funciones de Nevanlinna asociadas al *problema de momentos desplazado.*

También en este caso basta hacer $G_t(z) = Q(z)$, $z \in \mathbb{C}$ y se verifica fácilmente que $Q^* = Q$. En consecuencia, de acuerdo al corolario 5.2, concluimos que $\mathcal{H}_K$ es isométricamente isomorfo a un espacio de De Branges.

6

Teoría de muestreo asociada a un operador con resolvente compacta

En este capítulo, siguiendo las ideas desarrolladas en los precedentes, nos ocupamos de reconstruir funciones pertenecientes a ciertos espacios de Hilbert de funciones enteras los cuales denotaremos por $\mathcal{H}_\sigma$. La técnica mediante la cual es posible obtener fórmulas de muestreo en dichos espacios es la siguiente: a partir de un operador simétrico $\mathcal{A}$, invertible, densamente definido sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, con inverso y resolvente compactos, y una función entera σ, se construye una función compleja K_σ con valores en $\mathcal{H}$, la cual denominaremos núcleo de muestreo σ-resolvente. Con base en esta función – que desempeña el mismo rol del núcleo analítico K definido en el capítulo 2, a partir del cual se construyó el espacio $\mathcal{H}_K$ –, se construye por dualidad el espacio $\mathcal{H}_\sigma$, el cual además posee estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor.

Las fórmulas de muestreo obtenidas serán desarrollos, ortogonales y no ortogonales, los cuales se deducen utilizando como muestras los valores de toda función f de $\mathcal{H}_\sigma$ en el espectro discreto de $\mathcal{A}$. Para ello se usa el teorema espectral para operadores compactos. Resultados de muestreo ortogonales obtenidos de esta forma pueden verse en las referencias [60] y [63].

En la sección 6.1 se hace la construcción de los espacios $\mathcal{H}_\sigma$ como RKHS análogamente a los espacios $\mathcal{H}_K$, y en la sección 6.2 se desarrolla la correspondiente teoría de muestreo en la cual, siguiendo las ideas fundamentales descritas en el capítulo 3, se deducen algunas fórmulas de muestreo. En la sección 6.3 se estudia la propiedad *ZR* en $\mathcal{H}_\sigma$; y, finalmente, en el apartado 6.4 utilizando el teorema 5.4, se estudia cuándo el espacio $\mathcal{H}_\sigma$ será un espacio de De Branges.

6.1. Los espacios $\mathcal{H}_\sigma$

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y

$$\mathcal{A}: \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

un operador lineal simétrico (formalmente autoadjunto) densamente definido en $\mathcal{H}$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es invertible, en cuyo caso denotaremos a su inverso mediante $\mathcal{T}$, el cual supondremos además que es compacto.

Es conocido en el ámbito del análisis espectral de operadores simétricos compactos, que estos tienen espectro discreto, [106]. Esta y otras propiedades básicas de dichos operadores serán de utilidad a posteriori en relación con la teoría de muestreo. Por lo tanto, en lo que sigue, antes de desarrollar las ideas centrales de este capítulo, presentamos una lista de algunas de tales propiedades (véanse por ejemplo, [106] o [109]).

Sea $\mathcal{T}$ el operador compacto considerado anteriormente, y supongamos que $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ es la sucesión de sus valores propios. Entonces:

1. Todo elemento distinto de cero, del espectro de $\mathcal{T}$ es un valor propio del operador.

2. El espectro $\sigma(\mathcal{T})$ es contable (puede ser finito o incluso vacío). Además, el único punto posible de acumulación de este conjunto es 0.

3. El espectro $\sigma(T)$ es real.

4. Para todo valor propio $\lambda \neq 0$, el espacio nulo $\ker(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{T})$ tiene dimensión finita.

5. La sucesión de vectores propios $\{x_k\}$ de $\mathcal{T}$ constituye una base ortonormal de $\mathcal{H}$ si y solamente si $\lambda = 0$ no es un valor propio de $\mathcal{T}$.

Utilizando la propiedad 2, cuando el espectro de $\mathcal{T}$ es infinito numerable, entonces $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$; con lo cual, es posible ordenarlo formando una sucesión decreciente de sus módulos, esto es, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq .....|\lambda_n| \geq ...$. Además, 0 no puede ser un valor propio de $\mathcal{T}$ por ser este un operador invertible. En consecuencia, de acuerdo a la propiedad 5, la sucesión de vectores propios de $\mathcal{T}$ la cual notaremos $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ constituye una base ortonormal para $\mathcal{H}$.

De acuerdo a la parte 4, sabemos que la dimensión de todo espacio propio asociado a cada valor propio del operador $\mathcal{T}$ es finita. Por lo tanto, para cada λ_n definimos

$$\kappa_n = \dim\ker(\lambda_n\mathcal{I} - \mathcal{T}) < \infty$$

Teniendo en cuenta lo anterior, observamos que los valores y vectores propios del operador simétrico $\mathcal{A}$ están determinados por las sucesiones $\{z_n = 1/\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$. Por lo tanto, se cumple que $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$ y $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots |z_n| \leq \ldots$. Además se tienen las siguientes propiedades, (véase [109, p. 343]):

5. Para cada $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ se cumple el desarrollo en serie

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle_{\mathcal{H}} e_k.$$

6. Un número complejo z pertenece al espectro de $\mathcal{A}$ si y solamente si z es alguno de los elementos de $\{z_n\}$ y $\mathcal{A}e_n = z_n e_n$.

7. Si z no pertenece al espectro de $\mathcal{A}$ entonces se cumple el siguiente desarrollo en serie para el operador resolvente de $\mathcal{A}$:

$$(z\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle x, e_k\rangle_{\mathcal{H}}}{z - z_k}e_k, \tag{6.1}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Además, $(z\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ es compacto**.**

Es posible reordenar los vectores propios de $\mathcal{A}$ mediante la expresión

$$\left\{\left(e_{n,i}\right)_{i=1}^{\kappa_n}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

para $i = 1, 2, \ldots, \kappa_n$ y $n \in \mathbb{N}$, donde $\left(e_{n,i}\right)_{i=1}^{\kappa_n}$ es una base del espacio propio asociado al valor propio λ_n.

Por otra parte, es conocido que el operador resolvente $R_z := (z\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ es una función meromorfa [109] en todo el plano complejo, el cual tiene polos simples en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. El desarrollo en serie (6.1) para R_z reescrito respecto a la sucesión de vectores propios $\left\{\left(e_{n,i}\right)_{i=1}^{\kappa_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ del operador $\mathcal{A}$, produce

$$R_z(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z - z_n}\sum_{i=1}^{\kappa_n}\langle x, e_{n,i}\rangle_{\mathcal{H}} e_{n,i}. \tag{6.2}$$

El núcleo σ-resolvente y los espacios $\mathcal{H}_\sigma$

Sean $\mathcal{A}$ un operador definido como antes, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sus valores propios y $R_z := (z\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ el operador resolvente de $\mathcal{A}$. Sea P una función entera con ceros simples en $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ (lo cual es permitido por el teorema de Weierstrass, [116, p. 54]), tal que $\overline{P(\overline{z})} = P(z)$; es decir, P es real en $\mathbb{R}$. Si además, el exponente de convergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ definido como

$$\eta = \inf\left\{\alpha > 0 \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{\alpha}} < +\infty\right\}$$

es finito, se puede tomar como función P el producto canónico asociado a la sucesión de valores propios $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante

$$P(z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{i}\right) & \text{si } p \geq 1 \\ \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Consideremos además una función entera $\sigma : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$. Definimos la siguiente función con valores en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\begin{array}{rccl} K_\sigma : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & z & \longmapsto & K_\sigma(z) := P(z)R_z(\sigma(z)) \end{array}$$

La función $R_z(\sigma(z))$ con valores en $\mathcal{H}$ es meromorfa, (véase [63, p. 69]) con polos simples en $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ mientras que P es una función entera con ceros simples en dicha sucesión; en consecuencia, al hacer el producto se eliminan los polos de la resolvente, por lo tanto, K_σ es una función entera con valores en $\mathcal{H}$ la cual es una candidata óptima para ser usada como núcleo para efectos de muestreo.

Definición 6.1. *La función entera K_σ valorada en $\mathcal{H}$, asociada a la función entera $\sigma : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ se denominará núcleo muestral σ-resolvente.*

Usando (6.2), se obtiene un desarrollo en serie para $K_\sigma(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$K_\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(z)}{z - z_n} \sum_{i=1}^{\kappa_n} \langle \sigma(z), e_{n,i} \rangle_{\mathcal{H}} e_{n,i}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.3}$$

En particular, si $z = z_m$, $m \in \mathbb{N}$ se obtiene

$$K_\sigma(z_m) = P'(z_m) \sum_{i=1}^{\kappa_m} \langle \sigma(z_m), e_{m,i} \rangle_{\mathcal{H}} e_{m,i}.$$

A partir del núcleo de muestreo σ-resolvente K_σ asociado a una función entera σ, análogamente a la teoría desarrollada en la sección 2.1, es posible construir un espacio de Hilbert de funciones enteras el cual en adelante será denominado espacio $\mathcal{H}_\sigma$. En efecto, consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{T}_\sigma : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ & x & \longmapsto & \mathbf{T}_\sigma(x) \end{array}$$

donde a cada elemento $x \in \mathcal{H}$ se le asigna la función compleja

$$[\mathbf{T}_\sigma(x)](z) := f_x(z) = \big\langle K_\sigma(z), x \big\rangle_{\mathcal{H}}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Denotaremos $\mathcal{H}_\sigma$ a la imagen del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ mediante la aplicación $\mathbf{T}_\sigma$; es decir,

$$\mathcal{H}_\sigma := \mathbf{T}_\sigma(\mathcal{H}) = \Big\{ f \,:\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} :\, f_x(z) = \Big\langle K_\sigma(z), x \Big\rangle_{\mathcal{H}}, \; x \in \mathcal{H} \Big\}.$$

Nótese que la aplicación $\mathbf{T}_\sigma$ es antilineal; además debido a que el núcleo K_σ es entero, entonces los elementos del espacio $\mathcal{H}_\sigma$ son funciones enteras.

Al igual que para los elementos en $\mathcal{H}_K$, en adelante omitiremos el subíndice x para toda $f \in \mathcal{H}_\sigma$.

$\mathcal{H}_\sigma$ como un RKHS

Análogamente que para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_K$ – cuya estructura se estudió en la secciones 2.2 y 2.3 – al dotar al espacio $\mathcal{H}_\sigma$ con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\sigma} := \text{ínf}\Big\{ \|x\|_{\mathcal{H}} :\; f = \mathbf{T}_\sigma(x) \Big\} \tag{6.4}$$

se obtiene un espacio de Hilbert de funciones enteras. Del mismo modo, siguiendo el procedimiento usado para $\mathcal{H}_K$, es posible probar que existe un elemento $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ para el cual el ínfimo definido en (6.4) se alcanza. En efecto, $\widetilde{x} = Qx$ donde Q es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{N}^\perp$ y $\mathcal{N}$ denota como es usual el núcleo de $\mathbf{T}_\sigma$. En consecuencia, para todo $x \in \mathcal{H}$ la igualdad $\mathbf{T}_\sigma(x) = f$ verifica $\|f\|_{\mathcal{H}_\sigma} = \|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}}$; por lo tanto, $\mathbf{T}_\sigma$ es acotado y $\|\mathbf{T}_\sigma\| \leq 1$.

Por otra parte, puesto que los funcionales de evaluación $E_z : \mathcal{H}_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ dados por $E_z(f) := f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ son continuos, entonces $\mathcal{H}_\sigma$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Usando la proposición 2.1 probada en la sección 2.3, el núcleo reproductor κ_σ es la función

$$\begin{array}{rccc} \kappa_\sigma : & \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z,\omega) & \longmapsto & \big\langle K_\sigma(z), K_\sigma(\omega) \big\rangle_{\mathcal{H}}. \end{array}$$

Al sustituir los valores de $K_\sigma(z)$ y $K_\sigma(\omega)$ encontramos una expresión explícita para $\kappa_\sigma(z,\omega)$:

$$\kappa_\sigma(z,\omega) = P(z)\overline{P(\omega)}\Big\langle R_z(\sigma(z)), R_\omega(\sigma(\omega))\Big\rangle_{\mathcal{H}}.$$

6.2. Teoría de muestreo en $\mathcal{H}_\sigma$

El desarrollo (6.2) del operador resolvente R_z se puede generalizar sustituyendo la base ortonormal por una base de Riesz. En concreto, la situación es la siguiente: puesto que la sucesión $\{(e_{n,i})_{i=1}^{\kappa_n}\}_{n=1}^\infty$ conformada por vectores propios del operador $\mathcal{A}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, consideremos una base de Riesz $\{(x_{n,i})_{i=1}^{\kappa_n}\}_{n=1}^\infty$ (obtenida al perturbar dicha base ortonormal) y $\{(x_{n,i}^*)_{i=1}^{\kappa_n}\}_{n=1}^\infty$ su base dual asociada. Un desarrollo análogo a (6.3) para el núcleo σ-resolvente K_σ respecto a $\{(x_{n,i})_{i=1}^{\kappa_n}\}_{n=1}^\infty$ se define de la siguiente forma:

$$K_\sigma(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{P(z)}{z-z_n}\sum_{i=1}^{\kappa_n}\big\langle \sigma(z), x_{n,i}^*\big\rangle_{\mathcal{H}} x_{n,i}. \tag{6.5}$$

En particular,

$$K_\sigma(z_m) = P'(z_m)\sum_{i=1}^{\kappa_m}\big\langle \sigma(z_m), x_{m,i}^*\big\rangle_{\mathcal{H}} x_{m,i}. \tag{6.6}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, obtenemos la siguiente fórmula de muestreo:

Teorema 6.1. *Toda función f perteneciente al espacio $\mathcal{H}_\sigma$ se puede recuperar a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(z_n)\}_{n=1}^\infty$, mediante la fórmula de muestreo*

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty f(z_n)\frac{A_n^f(z)}{A_n^f(z_n)}\frac{P(z)}{(z-z_n)P'(z_n)}, \qquad z\in\mathbb{C}, \tag{6.7}$$

donde $A_n^f(z)$ depende de f y está dada por la expresión

$$A_n^f(z) := \sum_{i=1}^{\kappa_n}\overline{\big\langle x, x_{n,i}\big\rangle}_{\mathcal{H}}\big\langle \sigma(z), x_{n,i}^*\big\rangle_{\mathcal{H}}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

La convergencia de la serie en (6.7) es en la norma de $\mathcal{H}_\sigma$, absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Dada $f\in\mathcal{H}_\sigma$, sea $x\in\mathcal{H}$ tal que $f=\mathbf{T}_\sigma(x)$. El desarrollo en serie de x respecto a la base de Riesz $\{(x_{n,i}^*)_{i=1}^{\kappa_n}\}_{n=1}^\infty$ es

$$x = \sum_{n=1}^\infty\sum_{i=1}^{\kappa_n}\langle x, x_{n,i}\rangle_{\mathcal{H}}\, x_{n,i}^*.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(z) &= \big\langle K_\sigma(z), x \big\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle K_\sigma(z), \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\kappa_n} \langle x, x_{n,i} \rangle_{\mathcal{H}} \, x_{n,i}^* \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\kappa_n} \overline{\langle x, x_{n,i} \rangle_{\mathcal{H}}} \, \big\langle K_\sigma(z), x_{n,i}^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \, . \end{aligned}$$

Utilizando el desarrollo (6.5) respecto a $\big\{ \big(x_{n,i} \big)_{i=1}^{\kappa_n} \big\}_{n=1}^{\infty}$ del núcleo de muestreo σ-resolvente, $K_\sigma(z)$ obtenemos,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\kappa_n} \overline{\big\langle x, x_{n,i} \big\rangle_{\mathcal{H}}} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P(z)}{z - z_m} \sum_{i=1}^{\kappa_m} \big\langle \sigma(z), x_{m,i}^* \big\rangle \, x_{m,i}, x_{n,i}^* \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\kappa_n} \overline{\big\langle x, x_{n,i} \big\rangle_{\mathcal{H}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P(z)}{z - z_m} \sum_{i=1}^{\kappa_m} \big\langle \sigma(z), x_{m,i}^* \big\rangle \big\langle x_{m,i}, x_{n,i}^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\kappa_n} \overline{\big\langle x, x_{n,i} \big\rangle_{\mathcal{H}}} \big\langle \sigma(z), x_{n,i}^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \frac{P(z)}{z - z_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^f(z) \frac{P(z)}{z - z_n} . \end{aligned} \tag{6.8}$$

Por otra parte, usando (6.6) tenemos,

$$\begin{aligned} f(z_n) &= \big\langle K_\sigma(z_n), x \big\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle P'(z_n) \sum_{i=1}^{\kappa_n} \big\langle \sigma(z_n), x_{n,i}^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \, x_{n,i}, x \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= P'(z_n) \sum_{i=1}^{\kappa_n} \big\langle \sigma(z_n), x_{n,i}^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \overline{\langle x, x_{n,i} \rangle_{\mathcal{H}}} = P'(z_n) A_n^f(z_n). \end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir esta última expresión en (6.8), obtenemos (6.7).

Nótese que $f(z_n) \neq 0$ si y solamente si $A_n^f(z_n) \neq 0$.

Puesto que toda base de Riesz es base incondicional, la serie (6.7) converge puntual e incondicionalmente y en consecuencia, hay convergencia absoluta en $\mathbb{C}$. Además, la convergencia uniforme se verifica también por ser $\mathcal{H}_\sigma$ un RKHS, puesto que la función $z \longmapsto \|K_\sigma(z)\|_{\mathcal{H}_\sigma}$ es acotada en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

□

El operador $\mathbf{T}_\sigma$ es inyectivo si y solamente si es una isometría; o equivalentemente, si y solamente si el conjunto $\big\{ K_\sigma(z) \big\}$, $z \in \mathbb{C}$, es completo en $\mathcal{H}$. Si en particular, $\kappa_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión

$$\Big\{ K(z_n) \Big\}_{n \in \mathbb{N}} = \Big\{ P'(z_n) \, \langle \sigma(z_n), x_n^* \rangle \, x_n \Big\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{6.9}$$

es completa en $\mathcal{H}$ si $\left\langle \sigma(z_n), x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, el operador $\mathbf{T}_\sigma$ es una isometría antilineal entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_\sigma$; por lo tanto, la sucesión,

$$\left\{ \mathbf{T}_\sigma(x_n^*) = \frac{P(z)}{z - z_n} \langle \sigma(z), x_{n,i}^* \rangle_{\mathcal{H}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una base de Riesz para $\mathcal{H}_\sigma$. Además se tienen los siguiente resultados:

Corolario 6.1. *Toda función $f \in \mathcal{H}_\sigma$ puede ser recuperada a partir de sus muestras $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ mediante la serie*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{\left\langle \sigma(z), x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}}}{\left\langle \sigma(z_n), x_n^* \right\rangle_{\mathcal{H}}} \frac{P(z)}{(z - z_n)P'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{6.10}$$

La convergencia de la serie en (6.10) es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

En el caso particular en que $\sigma(z) = c \in \mathcal{H}$ donde c es una constante, obtenemos una serie de muestreo tipo-Lagrange:

Corolario 6.2. *Toda función $f \in \mathcal{H}_c$, tal que $f(z) = \left\langle K_c(z), x \right\rangle_{\mathcal{H}}$, $z \in \mathbb{C}$, donde $x \in \mathcal{H}$, puede ser recuperada a partir de sus muestras $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ mediante la serie interpolatoria tipo-Lagrange*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{P(z)}{(z - z_n)P'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{6.11}$$

La convergencia de la serie en (6.11) es absoluta y uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

6.3. La propiedad *ZR* en los espacios $\mathcal{H}_\sigma$

En la sección anterior demostramos que en el espacio de Hilbert de funciones enteras $\mathcal{H}_\sigma$ proveniente del núcleo σ-resolvente K_σ es posible presentar una fórmula de muestreo como (6.7). También probamos que si $\kappa_n = 1$, entonces (6.7) se reduce a (6.10). Ahora, nos preguntamos por la existencia de condiciones sobre la función entera σ de tal manera que en el correspondiente espacio $\mathcal{H}_\sigma$ se verifique la propiedad *Zero-removing* y por consiguiente, la serie muestral en (6.10) sea interpolatoria tipo-Lagrange.

Una condición suficiente se obtiene cuando la función $\sigma(z)$ es constante. Si $\sigma(z) = c \in \mathcal{H}$, de acuerdo al corolario 6.2, en $\mathcal{H}_c$ existe una fórmula de muestreo tipo-Lagrange; por lo tanto, aplicando el teorema 4.2 (sección 4.3, p. 68), se concluye que en $\mathcal{H}_c$ se verifica la propiedad *ZR*.

En lo que sigue, asumiremos que la multiplicidad de cada valor propio del operador $\mathcal{A}$ es 1. El desarrollo en serie (6.3) para el núcleo muestral σ-resolvente $K_\sigma(z) := P(z)R_z(\sigma(z))$ respecto a la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ se convierte en

$$K_\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(z)}{z - z_n} \big\langle \sigma(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} x_n. \tag{6.12}$$

Las funciones muestrales vienen dadas por:

$$\Big\{ S_n(z) = \big\langle K_\sigma(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \Big\}_{n=1}^{\infty}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Al usar el desarrollo (6.12), obtenemos

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \Big\langle \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P(z)}{z - z_m} \big\langle \sigma(z), x_m^* \big\rangle_{\mathcal{H}} x_m, x_n^* \Big\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{P(z)}{z - z_n} \big\langle \sigma(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \mathcal{H}_\sigma$.

Ahora bien, sabemos que toda función f perteneciente al RKHS $\mathcal{H}_\sigma$ hereda los ceros del núcleo $K_\sigma := P(z)R_z(\sigma(z))$. Observando el desarrollo (6.12), recuérdese que la función P es entera, con ceros simples únicamente en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, con lo cual, si existe $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma(\omega) = 0$, entonces $K_\sigma(\omega) = 0$ y de acuerdo al ejemplo 4.3 de la sección 4.2, la propiedad *ZR* no se cumple en dicho espacio. Por lo tanto, en lo que sigue supondremos que $\sigma(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

El conjunto de ceros de S_n está constituido por la reunión de los ceros de P junto a los ceros de $\big\langle \sigma(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}}$; esto es,

$$\Big\{ z_k \Big\}_{k \neq n} \bigcup \Big\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \big\langle \sigma(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Big\}$$

Teniendo en cuenta los detalles descritos anteriormente, están dadas las condiciones para enunciar el siguiente teorema:

Teorema 6.2. *En el espacio $\mathcal{H}_\sigma$ se verifica la propiedad ZR si y solamente si existen una función entera $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sin ceros y un elemento $u \in \mathcal{H}$, $u \neq 0$, tal que la función entera resolvente σ se puede expresar en la forma $\sigma(z) = F(z)u$.*

Demostración. Supongamos que la función resolvente σ se puede escribir en la forma

$\sigma(z) = F(z)u$, $u \neq 0$. Sea $f \in \mathcal{H}_\sigma$, aplicando (6.10), obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{\langle F(z)u, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle F(z_n)u, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}}} \frac{P(z)}{(z-z_n)P'(z_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{F(z)}{F(z_n)} \frac{P(z)}{(z-z_n)P'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Nótese que $\langle u, x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que $\langle \sigma(z_n), x_n^* \rangle_{\mathcal{H}} \neq 0$. Por lo tanto, basta hacer $Q(z) = F(z)P(z)$, $z \in \mathbb{C}$ y puesto que $Q'(z_n) = F(z_n)P'(z_n)$, al sustituir en (6.14) llegamos la serie tipo-Lagrange

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{Q(z)}{(z-z_n)Q'(z_n)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

De acuerdo al teorema 4.2, se concluye que en el espacio $\mathcal{H}_\sigma$ se cumple la propiedad *ZR*.

Para probar el recíproco, consideremos la familia de funciones

$$T_{n,m}(z) = \frac{S_n(z)}{z - z_m}, \quad m \neq n, \quad z \in \mathbb{C},$$

las cuales pertenecen al espacio $\mathcal{H}_\sigma$, ya que por hipótesis, en dicho espacio se cumple la propiedad *ZR*. Utilizando el desarrollo (6.10) del corolario 6.1 para $T_{n,m}(z)$, llegamos a

$$T_{n,m}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} T_{n,m}(z_j) \frac{\langle \sigma(z), x_j^* \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle \sigma(z_n), x_j^* \rangle_{\mathcal{H}}} \frac{P(z)}{(z-z_j)P'(z_j)}. \tag{6.15}$$

Ahora, efectuamos la evaluación de $T_{n,m}$ en la sucesión de muestras $\{z_j\}$ lo que produce

$$T_{n,m}(z_j) = \frac{S_n(z_j)}{z_j - z_m} = \begin{cases} \dfrac{P'(z_n)}{z_n - z_m} \Big\langle \sigma(z_n), x_n^* \Big\rangle_{\mathcal{H}} & j = n \\[2ex] \dfrac{P'(z_m)}{z_m - z_n} \Big\langle \sigma(z_m), x_n^* \Big\rangle_{\mathcal{H}} & j = m \\[2ex] 0 & j \neq m, n \end{cases}$$

con lo cual el desarrollo (6.15) de $T_{n,m}$ se convierte en,

$$\begin{aligned} T_{n,m}(z) &= \frac{P'(z_n)}{z_n - z_m}\big\langle\sigma(z_n), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}} \frac{\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle\sigma(z_n), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}} \frac{P(z)}{(z-z_n)P'(z_n)} \\ &+ \frac{P'(z_m)}{z_m - z_n}\big\langle\sigma(z_m), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}} \frac{\big\langle\sigma(z), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle\sigma(z_m), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}} \frac{P(z)}{(z-z_m)P'(z_m)} \\ &= \frac{P(z)}{z_n - z_m}\left[\frac{\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{z-z_n} - \frac{\big\langle\sigma(z_m), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle\sigma(z), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle\sigma(z_m), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}(z-z_m)}\right]. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Si usamos la definición de $T_{n,m}(z)$ y aplicamos (6.13) y (6.16) obtenemos

$$\frac{\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{(z-z_n)(z-z_m)} = \frac{1}{z_n - z_m}\left[\frac{\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{z-z_n} - \frac{\big\langle\sigma(z_m), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle\sigma(z), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle\sigma(z_m), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}(z-z_m)}\right]$$

Entonces:

$$\frac{\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{(z-z_m)(z-z_n)} - \frac{\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{(z-z_n)(z_n-z_m)} = -\frac{\big\langle\sigma(z_m), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle\sigma(z), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle\sigma(z_m), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}(z-z_m)(z_n-z_m)}.$$

Lo que es equivalente a

$$\frac{\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{z-z_n}\left[\frac{z-z_n}{(z-z_m)\,(z_m-z_n)}\right] = \frac{\big\langle\sigma(z_m), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle\sigma(z), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle\sigma(z_m), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}(z-z_m)(z_m-z_n)}.$$

Por lo tanto,

$$\big\langle\sigma(z), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\big\langle\sigma(z_m), x_m^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle\sigma(z_m), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}}\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{6.17}$$

Por otra parte, desarrollando $\sigma(z)$ respecto a la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtenemos

$$\sigma(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\big\langle\sigma(z), x_j^*\big\rangle_{\mathcal{H}} x_j$$

teniendo en cuenta (6.17) se observa que los coeficientes $\big\langle\sigma(z), x_j^*\big\rangle_{\mathcal{H}}$ satisfacen la igualdad

$$\big\langle\sigma(z), x_j^*\big\rangle_{\mathcal{H}} = a_{n,j}\big\langle\sigma(z), x_n^*\big\rangle_{\mathcal{H}}$$

donde

$$a_{n,j} = \begin{cases} \dfrac{\big\langle\sigma(z_j), x_j^*\big\rangle}{\big\langle\sigma(z_n), x_n^*\big\rangle} & j \neq n. \\ \\ 1 & j = n \end{cases}$$

Por (6.17), nótese que la sucesión $\{a_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{N})$.

Luego, aplicando (6.17) llegamos a

$$\sigma(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \big\langle \sigma(z), x_j^* \big\rangle_{\mathcal{H}} x_j = \big\langle \sigma(z), x_n^* \big\rangle_{\mathcal{H}} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j} x_j, = F_n(z) u_n$$

donde F_n es una función entera y u_n un elemento no nulo de $\mathcal{H}$, ya que los coeficientes $a_{n,j}$ son distintos de cero. En consecuencia, escogiendo un valor de n particular, concluimos el resultado y el teorema queda demostrado.

□

6.4. Los espacios $\mathcal{H}_\sigma$ como espacios de De Branges

En esta sección estudiamos la manera de relacionar los espacios $\mathcal{H}_\sigma$ con los espacios de De Branges. En concreto, utilizando el teorema 5.4, caracterizaremos al espacio $\mathcal{H}_\sigma$ proveniente de un núcleo de muestreo σ-resolvente K_σ como un espacio de De Branges. Para tal efecto, consideremos $x_n = x_n^* = e_n$ donde $\{e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ conformada por vectores propios del operador simétrico (formalmente autoadjunto) $\mathcal{A}$. Supongamos además que la multiplicidad de cada valor propio de dicho operador es 1. El desarrollo en serie para el núcleo muestral σ-resolvente K_σ respecto a la base ortonormal $\{e_n\}$ es

$$K_\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(z)}{z - z_n} \big\langle \sigma(z), e_n \big\rangle_{\mathcal{H}} e_n. \tag{6.18}$$

Bajo esas condiciones, el desarrollo en serie (6.10) del corolario 6.1 se convierte en el desarrollo ortogonal

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{\big\langle \sigma(z), e_n \big\rangle_{\mathcal{H}}}{\big\langle \sigma(z_n), e_n \big\rangle_{\mathcal{H}}} \frac{P(z)}{(z - z_n) P'(z_n)} \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{6.19}$$

donde P es una función entera cuyos ceros $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son reales y simples tal que $P^*(z) = \overline{P(\overline{z})} = P(z)$.

Si la función σ es constante, inmediatamente (6.19) es una serie muestral tipo-Lagrange análoga a (6.11) del corolario 6.2. En consecuencia, aplicando el teorema 5.4, el espacio $\mathcal{H}_\sigma$ resultante es un espacio de De Branges. En [60], se comprueba directamente utilizando el conjunto de propiedades proporcionado en la sección 5.1.2, p. 94 mediante las cuales se caracteriza a un espacio de Hilbert de funciones enteras como un espacio de De Branges.

Para aplicar el teorema 5.4, en el caso en que σ es una función entera no constante, la única posibilidad es $\sigma(z) = F(z)u$. Además, puesto la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es real y que $Q^* = Q$ con $Q(z) = F(z)P(z)$, se tiene que cumplir que $F^* = F$. Bajo esas condiciones, el espacio $\mathcal{H}_\sigma$ es un espacio de De Branges.

En el caso que se cumpla lo anterior y estemos en un espacio de De Branges, vamos a encontrar una función de estructura $E_\sigma = A_\sigma - iB_\sigma$. Teniendo en cuenta que el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}_\sigma$ es

$$\kappa_\sigma(z,\omega) = P(z)\overline{P(\omega)}\Big\langle R_z(\sigma(z)), R_\omega(\sigma(\omega))\Big\rangle_{\mathcal{H}}$$

expresamos dicho núcleo respecto de las funciones A_σ y B_σ como

$$\kappa(\omega,z) = \frac{\overline{A(\omega)}B(z) - A(z)\overline{B(\omega)}}{\pi(z-\overline{\omega})}, \quad z \neq \overline{\omega}.$$

Entonces, usando la siguiente fórmula (véase [20, p. 57]),

$$\begin{aligned} 2\pi i(\overline{\omega}-z)\kappa_\sigma(z,\omega) &= \frac{\pi(\alpha-z)\kappa_\sigma(z,\overline{\alpha})(\overline{\omega}-\overline{\alpha})\kappa_\sigma(\overline{\alpha},\omega)}{\operatorname{Im}(\alpha)\kappa_\sigma(\overline{\alpha},\overline{\alpha})} \\ &\quad - \frac{\pi(\overline{\alpha}-\overline{z})\kappa_\sigma(z,\alpha)(\overline{\omega}-\alpha)\kappa_\sigma(\alpha,\omega)}{\operatorname{Im}(\alpha)\kappa_\sigma(\alpha,\alpha)} \end{aligned} \tag{6.20}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}\,, \operatorname{Im}(\alpha) \neq 0$, es posible encontrar una expresión para la función estructura en términos del parámetro α; esto es, $E_\sigma(z)^\alpha := A_\sigma^\alpha(z) - iB_\sigma^\alpha(z)$. Para tal efecto, utilizando la siguiente propiedad del núcleo:

$$\overline{\kappa_\sigma(z,\omega)} = \kappa_\sigma(\omega,z) = \kappa_\sigma(\overline{z},\overline{\omega}),$$

además de $\kappa_\sigma(\alpha,\alpha) > 0$, fijando $\operatorname{Im}(\alpha) > 0$ sustituyendo y simplificando en (6.20), se obtiene

$$\begin{aligned} A_\sigma^\alpha(z) &= C_\alpha[(\overline{\alpha}-z)\kappa_\sigma(z,\alpha) + (\alpha-z)\kappa_\sigma(z,\overline{\alpha})] \\ B_\sigma^\alpha(z) &= iC_\alpha[(\overline{\alpha}-z)\kappa_\sigma(z,\alpha) - (\alpha-z)\kappa_\sigma(z,\overline{\alpha})] \end{aligned}$$

donde $C_\alpha = [\pi/\operatorname{Im}(\alpha)\kappa_\sigma(\alpha,\alpha)]^{1/2}$ y $A_\sigma^\alpha, B_\sigma^\alpha$ son reales para z real. En consecuencia la función $E_\sigma^\alpha(z)$ tal que $|E_\sigma^\alpha(\overline{z})| < |E_\sigma(z)^\alpha(z)|$, con $\operatorname{Im}(z) > 0$, es

$$E_\sigma^\alpha(z) = C_\alpha(\overline{\alpha}-z)\kappa_\sigma(z,\alpha), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Conclusiones y problemas abiertos

En este trabajo se desarrolló una teoría de muestreo analítico en el espacio de Hilbert con núcleo reproductor

$$\mathcal{H}_K := \Big\{ f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : f_x(z) = \langle K(z), x \rangle_{\mathcal{H}}, \ x \in \mathcal{H} \Big\}.$$

el cual se construyó a partir de un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, de un núcleo $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ y de un operador antilineal $\mathcal{T}_K$ con dominio en este espacio auxiliar $\mathcal{H}$ y valores en el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. El espacio $\mathcal{H}_K$ se caracterizó como un espacio de funciones enteras que cuando K es un núcleo analítico de Kramer, admite un conjunto de muestreo estable.

Los principales resultados obtenidos se resumen a continuación:

- Se ha probado un teorema de muestreo tipo Kramer el cual hemos denominado *teorema de muestreo analítico de Kramer* en el cual se dan condiciones para recuperar toda función en el espacio $\mathcal{H}_K$ a partir de una sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de sus muestras, mediante la fórmula de muestreo no ortogonal

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_n)}{a_n} S_n(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{6.21}$$

  donde la sucesión S_n es una base de Riesz en $\mathcal{H}_K$. La convergencia de (6.21) es puntual en $\mathbb{C}$, absoluta y además uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ donde la función $z \longmapsto \|K(z)\|$ esté acotada. Además se ha probado un resultado inverso de este teorema: a partir de una fórmula de muestreo como (6.21) en $\mathcal{H}_K$, bajo ciertas condiciones, el núcleo K es analítico de Kramer.

- Se ha demostrado una condición necesaria y suficiente para que la serie (6.21) se pueda escribir como una fórmula interpolatoria tipo-Lagrange en el espacio $\mathcal{H}_K$. Dicha condición es la existencia de la propiedad *Zero-removing* en $\mathcal{H}_K$. También, cuando el núcleo K es polinomial, se han formulado condiciones bajo las cuales en tal espacio se verifica la propiedad *ZR*.

- Se ha desarrollado una teoría de muestreo en los espacios de De Branges, $\mathcal{H}(E)$. Como en todo espacio de De Branges se cumple la propiedad *ZR*, se ha probado que todo desarrollo ortogonal se puede expresar como una serie interpolatoria tipo-Lagrange.

- Se han relacionado los espacios de De Branges y los espacios $\mathcal{H}_K$. Específicamente se han estudiado los siguientes problemas: cuándo un RKHS de funciones enteras es un espacio de De Branges; cuándo el espacio $\mathcal{H}_K$ se puede caracterizar como un espacio de De Branges, y recíprocamente, se dieron condiciones para determinar cuándo un espacio de De Branges $\mathcal{H}(E)$ es un RKHS $\mathcal{H}_K$.

- Finalmente, se han estudiado los espacios $\mathcal{H}_\sigma$ relacionados con operadores simétricos con resolvente compacta. Estos espacios se han caracterizado como espacios $\mathcal{H}_K$, se han probado algunas fórmulas de muestreo no ortogonal y se ha dado un resultado mediante el cual se garantiza la existencia de la propiedad *ZR*.

Todos los resultados de esta memoria se han acompañado con varios ejemplos ilustrativos en diferentes contextos.

Un extenso campo de investigación futuro, viene dado por el estudio de la propiedad *Zero-removing* en espacios $\mathcal{H}_K$ construidos a partir de núcleos K generales.

Bibliografía

[1] N.I. Akhiezer. *The Classical Moment Problem*, Hafner, New York, 1965.

[2] W. A. Al-Salam and N. Carlitz. *Some orthogonal q–polynomials*, Math. Nachr., 30, 47-61, 1965. New York, 1965.

[3] M. H. Annaby. *Finite Lagrange and Cauchy sampling expansions associated with regular difference equations*. Journal of Difference Equations and Applications 4, 551-569, 1998.

[4] M. H. Annaby and M. A. El-Sayed. *Kramer-type sampling theorems associated with Fredholm integral operators*. Methods Appl. Anal. 2, 76-91, 1995.

[5] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels.* Trans. Amer. Math. Soc., 68:337-404, 1950.

[6] F. Atkinson. *Discrete and Continous Boundary Problems.* Academic Press, New York, 1964.

[7] J. P. Aubin. *Applied Functional Analysis.* Wiley, New York, 1979.

[8] G. Bachman, L. Narici and E. Beckesnstein. *Functional Analysis*. Academic Press Inc., San Diego, 1966.

[9] G. Bachman, L. Narici and E. Beckesnstein, *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer, New York, 2000.

[10] A. Baranov and H. Woracek. *Majorization in de Branges spaces I. Representability of subspaces* J. Funct. Anal. 258(8), 2601-2636, 2010.

[11] J. Benedetto. *Frame decompositions, sampling and uncertainty principle inequalities.* In: J. Benedetto and M. Frazier ed., Wavelets: Mathematics and Applications. CRC Press, Boca Raton, pp. 247-304, 1994.

[12] J. Benedetto and P. J. Ferreira, editors. *Modern sampling theory: Mathematics and Applications.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[13] J. Benedetto and W. Heller. *Irregular sampling and the theory of frames I.* Note di Matematica, 10(1), 103-125, 1990.

[14] C. Berg. *Indeterminate Moment Problems and the theory of Entire Functions.* J. Comput. App. Math., 65:27-55, 1995.

[15] C. Berg and J. P. R. Christensen. *Density questions in the classical theory of moments.* Ann. Inst. Fourier 3, 31 99-114, 1981.

[16] C. Berg and G. Valent. *The Nevanlinna parametrisation for an indetrminate Stieltjes moment problem associated with some and death processes.* Methods. Appl. Anal. 1, 169-209, 1994.

[17] C. Berg and G. Valent. *Nevanlinna extremal measures for some orthogonal polynomials related birth and death processes.* J. Comput. App. Math., 57:29-43, 1995.

[18] F. Beutler. *Sampling theorems and bases in a Hilbert space.* Information and Control 4., 97-117, 1961.

[19] R. P. Boas Jr. *Entire functions.* Academic Press, New York, 1954.

[20] L. de Branges. *Hilbert Spaces of Entire Functions.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.

[21] L. de Branges. *Some applications of spaces of entire functions*. Canad. J. Math., 15:563-583, 1963.

[22] L. de Branges. *Some Hilbert Spaces of Entire Functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 10(5), 840-846, 1959.

[23] L. de Branges. *Some Hilbert spaces of entire functions.* Trans. Amer. Math. Soc., 96:259-295, 1960.

[24] L. de Branges. *Some Hilbert spaces of entire functions II.* Trans. Amer. Math. Soc., 99:118-152, 1961.

[25] L. de Branges. *Some Hilbert spaces of entire functions.* Bull. Amer. Math. Soc., 67(1), 129-134, 1961.

[26] L. de Branges. *Some Hilbert spaces of entire functions III.* Trans. Amer. Math. Soc., 100:73-115, 1961.

[27] L. de Branges. *Some Hilbert spaces of entire functions IV.* Trans. Amer. Math. Soc., 105:43-83, 1962.

[28] L. de Branges. *Some mean Squares of Entire Functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 10(5), 833-839, 1959.

[29] H. Buchwalter and G. Cassier. *La parametrisation de Nevanlinna dans le probleme des moments de Hamburger*, Exposition Math. 2, 155-178, 1984.

[30] P. L. Butzer. *A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions,* J. Math. Res Exposition 3, 185-212, 1983.

[31] P. L. Butzer, J. R. Higgins and R. L. Stens. *Sampling Theory of Signal Analysis*. In J. P. Pier Ed., *Development of Mathematics.* 1950-2000. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[32] P. L. Butzer and G. Nasri-Roudsari. *Kramer sampling theorem and its role in mathematics.* In Image Processing: Mathematical Methods and Applications, Oxford University Press, Oxford, UK, 1994.

[33] P. L. Butzer and G. Schöttler. *Sampling Theorems associated with fourth-and higher-order self-Adjoint eigenvalue problems.* J. Comput. Appl. Math, 51:159-177, 1994.

[34] P. L. Butzer and W. Splettstößer. *Approximations theorems for duration-limited functions with error estimates.* Inform. and Control, 34:55-65, 1977.

[35] P. L. Butzer and R. L. Stens. *Sampling theory for no necessarily band-limited functions: A historical overview.* SIAM Review, 34(1):40-53, 1992.

[36] L. Campbell. *A comparison of the sampling theorems of Kramer and Whittaker*, J. SIAM 12, 117-130, 1964.

[37] P. G. Casazza. The art of frame theory. *Taiwanese J. Math.,* 2, 129-201, 2000.

[38] T. S. Chihara. *An Introduction To Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.

[39] J. Chung, S. Chung and D. Kim. *Sampling theorem for entire functions of exponential growth*. J. Anal. Math. Appl., 265, 217-228, 2002.

[40] O. Christensen. *An Introduction To Frames and Riesz Bases.* Birkhauser, Boston, 2003.

[41] O. Christensen. *Frames and Bases. An Introductory Course.* Birkhauser, Boston, 2008.

[42] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, New York, 1955.

[43] L. Debnath, P. Mikusinski. *Introduction to Hilbert Spaces with applications.* Academic Press Inc., San Diego, 1990.

[44] C. DeVito. *Functional Analysis and Linear Operator Theory.* Addison-Wesley Publishing Company., Redwood City, CA, 1990.

[45] W. F. Donoghue. *Orthonormal sets in reproducing kernel spaces and functional completion.* Note di Matematica, Vol 10(1), 223-227, 1990.

[46] D. E. Edmunds and W. D. Evans. *Spectral Theory and Differential Operators.* Clarendon Press, Oxford, 1987.

[47] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators, Part II: Spectral Theory.* Wiley, New York, 1988.

[48] W.N. Everitt and G. Nasri-Roudsari. *Interpolation and sampling theories, and linear ordinary boundary value problems*. In J. R. Higgins and R. L. Stens, editors, Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Advanced Topics. Oxford University Press, Oxford, 1999. Ch 5.

[49] W.N. Everitt and G. Nasri-Roudsari. *Sturm-Liouville Problems with coupled boundary conditions and Lagrange Interpolation series.* J. Comp. Anal. Appl., 1(4), 319-347, 1999.

[50] W.N. Everitt and G. Nasri-Roudsari. *Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions and Lagrange Interpolation series: II.* Rendiconti di Matematica., 20:199-238, 2000.

[51] W.N. Everitt, G. Nasri-Roudsari and J. Rehberg,. *A note on the analytic form of the Kramer sampling theorem.* Rensults Math., 34(3-4):310-319, 1998.

[52] W. N. Everitt, A.G. García and M. A. Hernández-Medina. *On Lagrange-type interpolation series and analytic Kramer kernels.* Results Math., 51:215-228, 2008.

[53] P. E. Fernández Moncada, A.G. García and M. A. Hernández-Medina. *The Zero-removing property and Lagrange- type interpolation series.* Num. Funct. Anal. Optim., 32(8), 858-876, 2011.

[54] P. E. Fernández Moncada, A.G. García and M. A. Hernández-Medina. *Sampling associated with a resolvent-type kernel and Lagrange-type interpolation series.* Preprint, 2012.

[55] A.G. García. *Orthogonal sampling formulas: a unified approach.* SIAM Rev. 42, 499-512, 2000.

[56] A.G. García and A. Portal. *Sampling in the Functional Hilbert Space Induced by a Hilbert Space Valued Kernel.* APP. Anal. 12:1145-1158, 2003.

[57] A.G. García and M. A. Hernández-Medina. *The Discrete Kramer sampling theorem and indeterminate moment problems.* J. Comp. Appl. Math., 134:13-22, 2001.

[58] A.G. García and M. A. Hernández-Medina. *Discrete Sturm-Liouville problems, Jacobi matrices and Lagrange-type interpolation series.* J. Math. Anal. Appl., 280:221-231, 2003.

[59] A.G. García and M. A. Hernández-Medina. *Sampling theorems and difference Sturm-Liouville Problems.* J. Difference Equations and Applications, 6:695-717.

[60] A.G. García and M. A. Hernández-Medina. *Sampling Theory Associated with a Symmetric Operator with compact resolvent and De Branges Spaces.* Mediterr. J. math. 2:345-356, 2005.

[61] A.G. García and L. L. Littlejohn. *On Analytic Sampling Theory.* J. Comp. Appl. Math., 171:235-246, 2004.

[62] A.G. García and F. H. Szafraniec. *A converse of the Kramer Sampling Theorem.* Sampling Theory in signal and Image Processing, 1(1), 53-61, 2002.

[63] A.G. García M. A. Hernández-Medina and A. Portal. *An approximation property of the functions defined through a resolvent sampling kernel.* Far. J. Math. 26(1), 65-90, 2007.

[64] A.G. García M. A. Hernández-Medina and F. H. Szafraniec. *Analytic Kramer kernels, Lagrange-type interpolation series and de Branges spaces.* Complex Variables and Elliptic Equations, doi:10.1080/17476933.2010.551206, 2011.

[65] J. B. Garnett. *Bounded Analytic functions.* Academic Press, New York, 1981.

[66] D. Han, M. Z. Nashed and Q. Sun. *sampling expansions in reproducing kernel Hilbert and Banach spaces.* Numer. Funct. Anal. Optim., 26: 971-987, 2009.

[67] G. H. Hardy. *Notes on special systems of orthogonal functions, IV: The orthogonal functions of Whitaker's cardinal.* Proc. Camb. Phil. Soc., 37:331-348, 1941.

[68] J. R. Higgins. *A sampling theorem for irregularly spced sample points.* IEEE. Trans. Inform. Theory., IT-22 621-622, 1976.

[69] J. R. Higgins. *Completeness and basics properties of sets of special functions. In Cambridge tracts in mathematics 72.* Cambridge University Press, 1972.

[70] J. R. Higgins. *Five short stories about cardinal series.* Bull. Amer. Math. Soc., 12:45-89, 1985.

[71] J. R. Higgins. *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Foundations.* Oxford University Press, Oxford, 1996.

[72] J. R. Higgins. *A sampling principle associated with Saitoh's fundamental theory of linear transformations.* In: S. Saitoh et al. (ed.), Analytic Extension Formulas and their applications. Kluwer Academic, 2001.

[73] Y. M. Hong, J. M. King and K. H. Kwon. *Sampling Theory in abstract reproducing kernel Hilbert space.* Theory Signal Image Process 6, 109-121, 2007.

[74] M.E.H. Ismail, J. Letessier, D. Masson and G. Valent, *Birth and death processes and orthogonal polynomials,* in: Orthogonal Polynomials: Theory and Practice, NATO ASI Ser. C, Vol. 294. Kluwer, Dordrecht, 1990.

[75] M. E. H. Ismail and D. R. Masson. *q-Hermite polynomials biorthogonal rational functions and q-beta integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. 346, 63-116, 1994.

[76] A. Jerri. *Sampling expansion for Laguerre-L_ν^α transforms.* J. Res. Nat. Bur. Standards Sec. B 80(3) 415-418, 1976.

[77] A. Jirari. *Second order Sturm-Liouville difference equations and orthogonal polynomials.* Memoirs of the AMS, 113 542, 1995.

[78] M. Kaltenbäck and H. Woracek. *De Branges spaces of exponential type: General theory of growth*, Acta Sci. Math (Szeged) 71(1/2), 231-284, 2005.

[79] S. Karlin and J. McGregor. *The differential equations of birth and death processes and the Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. math. Soc. 85 489-546, 1957.

[80] T. H. Kjeldsen. *The early story of the moment problem*, Historia Math 20, 19-44, 1993.

[81] H. P. Kramer. *A generalized sampling theorem.* J. Math. Phys. 63, 68-72, 1957.

[82] J. C. Lagarias. *Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions.* In: Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry I, Springer, Berlin, 367-378, 2006.

[83] B. Levin. *Distribution of Zeros of entire functions.*Traslations of Mathematical Monographs, Vol 5, AMS, 1980.

[84] B. Levin, Y. Lyubarski, M. Sodin and V. Tkachenko. *Lectures on entire functions.* Traslations of Mathematical Monographs, Vol 150, AMS, 1991.

[85] N. Levinson. *Gap and Density Theorems.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publs. Ser., 26, 1940.

[86] N. Makarov and A. Poltoratski. *Meromorphic inner functions, Toeplitz Kernels and the uncertainty principle.* In: Mathematical Physics Studies, vol 27, Springer, Berlin, 185-252, 2006.

[87] R. J. Marks II. *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory,* Springer-Verlag, New York, 1991.

[88] F. Marvasti. *Nonuniforming Sampling, Theory and Practise.* Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001.

[89] M. Z. Nashed and G. G. Walter. *General sampling theorems for functions in reproducing kernel spaces,* Math. Control Signals Systems, 4:363-390, 1991.

[90] M. Z. Nashed and G. G. Walter. *Reproducing kernel Hilbert spaces from sampling expansions,* J. Cont. Math., 190:221-226, 1995.

[91] A. W. Naylor and G.R. Sell. *Linear Operator Theory.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[92] S. M. Nikols'kii. *Linear Operator Theory.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[93] R.C. Paley and N. Wiener. *Fourier Transforms in the Complex Domain,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol 19, 1934.

[94] J. R. Partington. *Interpolation, Identification and Sampling. Clarendon Press Oxford,* 1997.

[95] H. L. Pedersen. *The Nevanlinna matrix of entire functions associated with shifted indeterminate Hamburger moment problem*. Math. Scand. 74, 152-160, 1994.

[96] W. Rudin. *Real and Complex analysis*, 3ª ed, McGraw Hill, New York, 1966.

[97] S. Saitoh. *Applications of the general theory of reproducing kernels.* In: S. Saitoh et al. (ed.), Reproducing Kernels and their applications. Kluwer Academic, 1999.

[98] S. Saitoh. *Applications of the reproducing kernel theory to inverse problems,* Comm. Korean Math. Soc. 16, 371-383, 2001.

[99] S. Saitoh. *Theory of reproducing kernels and its applications,* Longman Essex, England, 1988.

[100] S. Saitoh. *Integral transforms, reproducing kernels and their applications,* Longman Scientific & Technical, England, 1997.

[101] C. E. Shannon. *A Mathematical Theory of Communication,* Bell System Tech. J., 27:379-423, 623-656, 1948.

[102] C. E. Shannon. *Communication in the presence of noise.* Proc. IRE., 137:10-21, 1949.

[103] B. Simon. *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator.* Advances in Mathematics, 137:82-203, 1998.

[104] R. L. Stens. *A unified approach to sampling theorems for derivatives and Hilbert transforms.* Signal Process, 5, 139-151, 1983.

[105] M.H. Stone. *Linear Transformations in Hilbert Space.* American Mathematical Society, Colloquium Publications vol. 15, 1932.

[106] C. Swartz. *An Introduction to Functional Analysis.* Marcel Dekker, New York, 1992.

[107] F. H. Szafraniec. *Interpolation and domination by positive definite kernels,* in Complex Analysis - *Fifth Romanian -Finish Seminar, Part 2, Proc.* Bucarest (Romania), 1981, eds C. Andrean Cazacu, N. BOboc, M. Jurchescu and I. Suciu, Lecture Notes in Math., vol 1014, pp. 291-295, Springer, berlin-Heidelberg, 1983.

[108] F. H. Szafraniec. *The reproducing kernel Hilbert space and its multiplication operators,* Oper. Theory Adv. Appl., 114:253-263, 2000.

[109] A. E. Taylor and D. C. Lay. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1980.

[110] E. C. Titchmarsh. *The zeros of certain integral functions*, Proc. London Math. Soc., 26:283-302, 1926.

[111] E. C. Titchmarsh. *Eigenfunctions Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, Part I.* Clarendon Press, Oxford, edition, 1962.

[112] G. Valent. *Orthogonal polynomials for a quartic birth and death process*, J. Comput. Appl. Math., 49, 281-288, 1993.

[113] G. Valent. *Exact solutions of a quartic birth and death process and related orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math., 67(1):103-127, 1996.

[114] P. Weiss. *Sampling theorems associated with Sturm-Liouville systems.* Bull. Amer. Math. Soc., 63, 242, 1957.

[115] K. Yao. *Applications of reproducing kernel Hilbert space of band-limited signal models.* Information and Control., 11, 429-444, 1967.

[116] R. M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, revised first edition*, Academic Press, New York, 1980.

[117] A. I. Zayed. *Advances in Shannon´s Sampling Theory*. CRC Press, Boca Raton, 1993.

[118] A. I. Zayed, M. A. El-Sayed and M. H. Annaby. *On Lagrange interpolation and Kramer's sampling theorem associated with self-adjoint boundary-value problems*. J. Math. Anal. Appl., 158:269-284, 1991.

[119] A. I. Zayed, G. Hinsen and P. Butzer, *On Lagrange Interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems.* SIAM J. App. Math. 50:893-909, 1990.

[120] A. I. Zayed. *On Kramer's Sampling Theorem associated with General Sturm-Liouville Problems and lagrange Interpolation.* SIAM J. App. Math. 51:575-604, 1991.

[121] A. I. Zayed. *Sampling in a Hilbert Space.* Proc. Amer. Math. Soc. 12:3767-3776, 1996.

Índice alfabético